JORNAL DE SCIENCIAS

MATHEMATICAS, PHYSICAS E NATURAES

PUBLICADO SOB OS AUSPICIOS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA



SEGUNDA SÉRIE—TOMO V

Julho de 1897 a Dezembro de 1898



LISBOA
TYPOGRAPHIA DA ACADEMIA
1898

JORNAL DE SCIENCIAS

MATHEMATICAS, PHYSICAS E NATURAES

JORNAL DE SCIENCIAS

MATHEMATICAS, PHYSICAS E NATURAES

PUBLICADO SOB OS AUSPICIOS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA

SEGUNDA SÉRIE—TOMO V

Julho de 1897 a Dezembro de 1898





LISBOA
TYPOGRAPHIA DA ACADEMIA
1898

PROPRIÉTÉS DU NOMBRE 12345679 ET GÉNÉRALISATION

PAR

M. C. A. LAISANT

Docteur ès-sciences

Si on multiplie par 9 le nombre 12345679 on obtient 111111111; c'est-à-dire que

$$P = 12345679 = \frac{111111111}{9} = \frac{999999999}{9^2}$$

ou

$$\frac{1}{9^2} = \frac{P}{999999999}.$$

Le nombre P considéré n'est donc autre chose que la période de la fraction $\frac{1}{9^2}$ convertie en décimale sous forme périodique.

La propriété en question n'est nullement particulière au système décimal, et, au contraire, pour tout système de numération de base x, il est aisé de voir que la période P' de la fraction $\frac{1}{(x-1)^2}$ sous forme périodique simple présente une loi de formation tout-à-fait analogue à celle du nombre P ci-dessus.

En effet, en appelant z le nombre de chiffres de la période, on doit avoir

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{P'}{x^z - 1}$$

et on reconnait immédiatement qu'il faut pour cela $z = x - 1$.

Donc

$$P' = \frac{x^{x-1} - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^{x-2} + x^{x-3} + \ldots + x + 1}{x - 1}$$

et en effectuant la division,

$$P' = x^{x-3} + 2x^{x-4} + 3x^{x-5} + \ldots + (x-3)x + (x-1).$$

Par exemple, le nombre 1235, écrit dans le système de base 6, donne pour produit, quand on le multiplie par 5

$$11111$$

c'est-à-dire

$$6^4 + 6^3 + 6^2 + 6 + 1$$

comme il est bien aisé de vérifier.

DÉTERMINANT DE QUATRE POINTS D'UN PLAN, PAR RAPPORT A UN CINQUIÈME POINT

PAR

M. C. A. LAISANT

Docteur ès-sciences

Les quatre points A, B, C, D étant donnés sur un plan, soit X un cinquième point quelconque du même plan. Les droites XA, XB, XC, XD, considérées comme quantités géométriques, donnent naissance au déterminant

$$\begin{vmatrix} XA & XB \\ XC & XD \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} X-A & X-B \\ X-C & X-D \end{vmatrix} = \Delta$$

en rapportant tous les points à une origine arbitraire O, qui n'influe évidemment pas sur la valeur du déterminant.

Choisissons pour cette origine le centre de similitude direct des deux segments AB, CD, si bien que nous aurons

$$\frac{OA}{Ob} = \frac{OC}{OD} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Alors

$$\Delta = AD - BC + X(B + C - A - D) = X(B + C - A - B).$$

Soient H et F les milieux de AD, BC respectivement, nous aurons

$$\Delta = 2 \cdot OX \cdot HF.$$

Ainsi, ce déterminant ne varie pas de grandeur, quand le point X décrit une circonférence de centre O; il ne varie pas en inclinaison, mais seulement en grandeur, quand le point X décrit une droite passant par O. Il s'annulle quand X coïncide avec O.

Si le quadrilatère $ABCD$ vient à tourner autour du centre O,

il est clair que le déterminant Δ ne variera pas en grandeur, le point X restant fixe.

Si nous voulons interpréter géométriquement ce déterminant, il suffit de mener les bissectrices XL, XM des angles AXD, CXB, respectivement égales en longueur à $\sqrt{XA \cdot XD}$, $\sqrt{XC \cdot XB}$, on a ainsi

$$\Delta = XL^2 - XM^2 = 2 \cdot XP \cdot ML$$

en appelant P le milieu de ML, et par conséquent

$$XP \cdot ML = OX \cdot HF,$$

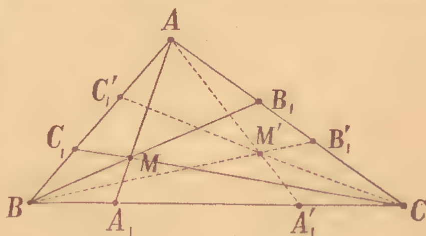
équipollence qui subsiste pour une position quelconque du point X sur le plan.

SUR LA CORRESPONDENCE D'UNE CONIQUE ET D'UNE DROITE; ET CONSTRUCTION PAR POINTS D'UNE CONIQUE PASSANT PAR CINQ POINTS DONNÉS

PAR

M. G. A. LAISANT
Docteur ès-sciences

Rappelons qu'on appelle points *inverses* dans un triangle deux points M, M' tels, que si les coordonnées barycentriques du premier sont α, β, γ et celles du second α', β', γ', on ait $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$. De là resulte la construction suivante très simple du point M' connaissant le point M: ayant joint AM, MB, CM, qui coupent les côtés opposés en A_1, B_1, C_1, on construira $CA'_1 = A_1B$, $AB'_1 = B_1C$, et on joindra AA'_1, BB'_1, qui se couperont en M'; de plus AC'_1 sera égale à C_1B. Les deux points M, M' sont d'ailleurs réciproques l'un de l'autre.



Cela posé, on sait que l'équation générale d'une conique circonscrite au triangle de référence ABC est, en coordonnées barycentriques,

$$P\beta\gamma + Q\gamma\alpha + R\alpha\beta = 0$$

ou

$$\frac{P}{\alpha} + \frac{Q}{\beta} + \frac{R}{\gamma} = 0.$$

Si nous considérons le point inverse M' d'un point quelconque de la conique, nous aurons donc en appelant α', β', γ' ses coordonnées,

$$P\alpha' + Q\beta' + R\gamma' = 0$$

c'est-à-dire que ce point se déplacera sur une droite quand M se déplacera sur la conique.

Ainsi, *à toute conique circonscripte à* A B C *correspond une droite, et réciproquement.*

En outre les points correspondants de la droite et de la conique sont inverses.

On peut déduire de là un mode très simple de construire par points une conique passant par cinq points donnés A, B, C, D, E.

Ayant pris, par exemple, ABC comme triangle fondamental, on construira les points inverses D', E', de D, E par rapport à ce triangle, et on trouvera la droite $D'E'$. Puis on construira les points inverses d'autants de points qu'on voudra de la droite $D'E'$, ce qui donnera les points correspondants de la conique demandée.

De là suit un moyen très facile de résoudre le problème suivant:

Deux coniques (A, B, C, D, E), (A, B, C, F, G) *étant données par cinq points, dont trois sont communs, trouver le quatrième point d'intersection* M.

Ayant déterminé les deux droites $D'E'$, $F'G'$, on prendra leur rencontre M', et le point inverse de M' sera M.

OBSERVATION

Depuis la rédaction de la présente Note, nous nous sommes assuré que le mode de transformation dont il s'agit a été indiqué par M. de Longchamps, qui en a donné notamment des applications dans la *Géométrie de la Règle et de l'Equerre.*

C'est donc incontestablement à lui qu'en revient la priorité. Mais nous avons maintenu cette Note malgré cela, car si l'ingénieuse méthode en question ne nous appartient pas, nous n'en trouvons pas moins intéressant de la faire connaître et de la répandre le plus possible.

SUR UNE QUESTION RELATIVE A UN PRODUIT DE QUANTITÉS COMPLEXES

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Cette question a été proposée en juin 1893 dans *El Progreso Matemático*, vol. III, p. 191, sous le nombre 132, mais notre solution, bien qu'annoncée dès-lors, n'a pas été publiée.

Son énoncé est le suivant:

Poser le produit

$$\left(1+x\sqrt{-1}\right)\left(1+x^2\sqrt{-1}\right)\left(1+x^4\sqrt{-1}\right)\left(1+x^8\sqrt{-1}\right)\ldots \quad (a)$$

sous la forme

$$P+Q\sqrt{-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Observation.— *Si le nombre de facteurs devient infini*

$$P^2+Q^2=\frac{1}{1-x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

$$(x<1).$$

(C. Catalan)

SOLUTION

Désignons $\sqrt{-1}$ par i.

Comme les exposants de x sont les diverses puissances 0, 1, 2, 3, ..., n de 2, le produit donné (a) se présentera sous la forme

$$(1+i\cdot x)(1+i\cdot x^{2^1})(1+i\cdot x^{2^2})(1+i\cdot x^{2^3})\ldots(1+i\cdot x^{2^n})\ldots. \quad (1)$$

En effectuant la multiplication on reconnait que les exposants de x, dans les différents facteurs de i^1, i^2, i^3, ..., i^n, i^{n+1}, sont respectivement les nombres représentés par les sommes des $n+1$ puissances 0, 1, 2, 3, ..., n de 2, prises deux à deux, trois à trois, ..., n à n, $n+1$ à $n+1$, de sorte que le nombre de termes en x, de ces mêmes facteurs, sera respectivement

$$\frac{n+1}{1}, \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}, \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots\ldots \frac{n+1}{1}, 1.$$

Ainsi, en posant

$$p = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-2, n-1, n, \ldots \quad (2)$$

$$p' = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-2, n-1, n, \ldots\ldots \quad (3)$$

$$p'' = 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-2, n-1, n, \ldots\ldots \quad (4)$$

$$p''' = 3, 4, \ldots, n-2, n-1, n, \ldots\ldots \quad (5)$$

. . . .

. . . .

$$q = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-2, n-1, n, \ldots\ldots \quad (2)'$$

$$q' = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-2, n-1, \ldots\ldots \quad (3)'$$

$$q'' = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-2, \ldots\ldots \quad (4)'$$

. . . .

. . . .

$$r' = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-2, n-1, \ldots\ldots \quad (2)''$$

$$r'' = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-2, \ldots\ldots \quad (3)''$$

. . . .

. . . .

$$s'' = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n-2, \ldots\ldots \quad (2)'''$$

de manière à ce que l'on ait toujours

$$q \leqq p' \ldots\ldots \quad (6)$$

$$q' + r' \leqq p'' \ldots\ldots \quad (7)$$

$$q'' + r'' + s'' \leqq p'''$$

on aura

$$\left.\begin{aligned}
&(1+ix)(1+i\cdot x^{2^1})(1+ix^{2^2})(1+i\cdot x^{2^3})\ldots\ldots\ldots\ldots(1+ix^{2^n})\\
&=1+i^1\left(x+\ldots\ldots\ldots+x^{2^n-p}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+x^{2^n}\right)\\
&\quad+i^2\left(x^3+\ldots\ldots\ldots+x^{2^n-p'(1+2^q)}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+x^{3\cdot 2^{n-1}}\right)\\
&\quad+i^3\left(x^7+\ldots\ldots\ldots+x^{2^n-p''(1+2^{q'}(1+2^{r'}))}+\ldots\ldots\ldots+x^{7\cdot 2^{n-2}}\right)\\
&\quad+i^4\left(x^{15}+\ldots\ldots\ldots+x^{2^n-p'''(1+2^{q''}(1+2^{r''}(1+2^{s''})))}+\ldots+x^{15\cdot 2^{n-3}}\right)\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+i^{n-2}\left(x^{2^{n-2}-1}+\ldots+x^{2^n-p''(2^{p''+1}-2^{q'}(1+2^{r'})-1)-1}+\ldots+x^{(2^{n-2}-1)2^3}\right)\\
&\quad+i^{n-1}\left(x^{2^{n-1}-1}+\ldots+x^{2^n-p'(2^{p'+1}-2^q-1)-1}+\ldots\ldots\ldots+x^{(2^{n-1}-1)2^2}\right)\\
&\quad+i^n\left(x^{2^n-1}+\ldots\ldots\ldots+x^{2^n-p(2^{p+1}-1)-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+x^{(2^n-1)2}\right)\\
&\quad+i^{n+1}\cdot x^{2^{n-1}-1}
\end{aligned}\right\}\ldots (8)$$

ou en remplaçant $\sqrt{-1}$ par i

$$\left.\begin{aligned}
&(1+x\sqrt{-1})(1+x^2\sqrt{-1})\ldots\ldots\ldots(1+x^2\sqrt{-1})\\
&=1-\left(x^3+\ldots+x^{2^n-p'(1+2^q)}+\ldots+x^{3\cdot 2^{n-1}}\right)+\\
&+\left(x^{15}+\ldots+x^{2^n-p'''(1+2^{q''}(1+2^{r''}(1+2^{s''})))}+\ldots+x^{15\cdot 2^{n-3}}\right)-\ldots\\
&\ldots+\Big[\left(x+\ldots+x^{n-1}+\ldots+x^n\right)-\\
&-\left(x^7+\ldots+x^{2^n-p''(1+2^{q'}(1+2^{r'}))}+\ldots+x^{7\cdot 2^{n-1}}\right)+\ldots\Big]\sqrt{-1}
\end{aligned}\right\}\ldots (9)$$

et on aura l'expression du produit donné sous la forme

$$P+Q\sqrt{-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

OBSERVATION

Considérons maintenant le produit des carrés des modules des facteurs de (1) et on aura

$$\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2^2}\right)\left(1+x^{2^3}\right)\ldots\ldots\left(1+x^{2^{n+1}}\right)=\frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x^2}\ldots(10)$$

Dans le cas où le nombre de facteurs de (1) ou (10) est infini, il vient

$$\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2^2}\right)\left(1+x^{2^3}\right)\ldots\ldots=\frac{1}{1-x^2}\ldots\ldots\ldots(11)$$

et, comme, *le module d'un produit est égal au produit des modules de ses facteurs,* on aura enfin,

$$P^2+Q^2=\frac{1}{1-x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

SUR UNE QUESTION RELATIVE AU TRIANGLE ET A LA GÉNÉRATION DES HYPERBOLES ADJOINTES RÉPONDANT AUX CERCLES ADJOINTS DE M. BROCARD

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

L'étude que nous allons présenter se rapporte à nos solutions et à nos recherches sur une question proposée dans *El Progreso Matemático* (*) en janvier 1892, par M. Cesàro, dont l'énoncé est le suivant:

Trois droites menées par les trois sommets d'un triangle déterminent sur les côtés opposés six segments, tels que la différence entre le produit de trois segments non consécutifs, ou n'ayant pas d'extrémités communes, et le produit des trois autres est:

$$\frac{abc}{a'b'c'}\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 lmn \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Dans cette expression Δ, a, b, c designent l'aire et les côtés du triangle donné; Δ', a', b', c' l'aire et les côtés du triangle formé par les trois droites; l, m, n les segments de ces droites compris entre les sommets et les côtés du premier triangle.

Les solutions de cette question, qui ont été publiées, sont celles des savants mathématiciens M.M. Sallertinsky et Cesàro (**); les nôtres ont été alors simplement annoncées.

Nous avons résolu de publier maintenant nos deux solutions de cette question, vu qu'elles sont différentes de celles de ces auteurs, et à faire connaitre de même les propriétés du triangle qui en dérivent, parcequ'elles nous ont parues intéressantes, sans avoir la prétention de leur supposer un caractère de nouveauté, attendu notre peu d'érudition, pour affirmer dès-lors un tel caractère ou leur priorité.

(*) Voy. *El Progreso Matemático,* vol. II, p. 31.
(**) Idem, vol. II, p. 253 et 255.

Ainsi, nous allons exposer d'abord les deux solutions, dont la seconde a été obtenue par la méthode des équipollences, et ensuite, dans une *remarque,* nous nous occuperons succinctement de la génération des *hyperboles* que nous appelons *adjointes.*

PREMIÈRE SOLUTION

Soit ABC le triangle donné (fig. 1); $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ les trois droites issues des sommets de ce triangle, ou les *céviennes* déterminant sur les côtés opposés BC, CA, AB les couples de segments $B\alpha$, αC; $C\beta$, βA; $A\gamma$, γB; et $A'B'C'$ le triangle déterminé par la rencontre de ces céviennes; et enfin posons $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$; $B'C'=a'$, $C'A'=b'$, $A'B'=c'$; $A\alpha=l$, $B\beta=m$, $C\gamma=n$.

Cela étant, considérons le triangle $\alpha A'C$ coupé par la transversale AB, et on aura

$$AA'\cdot\gamma C\cdot B\alpha=A\alpha\cdot\gamma A'\cdot BC \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ou

$$B\alpha=BC\cdot\frac{\gamma A'}{\gamma C}\cdot\frac{A\alpha}{AA'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Or les triangles $AA'B$, ACB, ayant la même base et les triangles $A'B'C'$, $AA'C'$ ayant les mêmes sommets, donnent

$$\frac{\gamma A'}{\gamma C}=\frac{AA'B}{ABC},\quad \frac{A'B'}{AA'}=\frac{A'B'C'}{AA'C'}$$

et par suite

$$\frac{\gamma A'}{\gamma C}\cdot\frac{A'B'}{AA'}=\frac{AA'B\cdot A'B'C'}{AA'C'\cdot ABC}$$

mais on a

$$\frac{AA'B}{AA'C'}=\frac{BB'}{B'C'}=\frac{BA'B'}{A'B'C'}$$

donc

$$B\alpha=\frac{a}{c'}\cdot\frac{BA'B'}{\Delta}\cdot l \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

En considérant les triangles $\beta B'A$, $\gamma C'B$, et les transversales BC, CA, on a analoguement

$$C\beta=CA\cdot\frac{\alpha B}{\alpha A}\cdot\frac{B\beta}{BB'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

d'où

$$C\beta=\frac{b}{a'}\cdot\frac{CB'C'}{\Delta}\cdot m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

et

$$A\gamma = AB \cdot \frac{\beta C'}{\beta B} \cdot \frac{C\gamma}{CC'} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

d'où

$$A\gamma = \frac{c}{b'} \cdot \frac{AC'A'}{\Delta} \cdot n \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

En multipliant les équations (3), (5), (7) membre à membre on trouve

$$B\alpha \cdot C\beta \cdot A\gamma = \frac{abc}{a'b'c'} \cdot \frac{BA'B' \cdot CB'C' \cdot AC'A'}{\Delta^3} \cdot lmn \dots\dots \quad (8)$$

Le triangle $BB'\alpha$ coupé par la transversale CA donne

$$\alpha C \cdot B\beta \cdot B'A = BC \cdot B'\beta \cdot \alpha A \dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

ou

$$\alpha C = BC \cdot \frac{B'\beta}{B\beta} \cdot \frac{\alpha A}{B'A} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

et en vertu des relations

$$\frac{B'\beta}{B\beta} = \frac{CB'A}{CBA}, \quad \frac{B'A'}{B'A} = \frac{B'A'C'}{B'AC'}$$

$$\frac{CB'A}{B'AC'} = \frac{CA'}{C'A'} = \frac{CB'A'}{B'A'C'}$$

il vient

$$\alpha C = \frac{a}{c'} \cdot \frac{CB'A'}{\Delta} \cdot l \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

Les triangles $CC'\beta$, $AA'\gamma$ et les transversales AB, BC donnent analoguement

$$\beta A = \frac{b}{a'} \cdot \frac{AC'B'}{\Delta} \cdot m \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

et

$$\gamma B = \frac{c}{b'} \cdot \frac{BA'C'}{\Delta} \cdot n \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

En multipliant les équations (11), (12), (13) membre à membre, comme précédemment, on a

$$\alpha C \cdot \beta A \cdot \gamma B = \frac{abc}{a'b'c'} \cdot \frac{CB'A' \cdot AC'B' \cdot BA'C'}{\Delta^3} \cdot lm \cdot n \dots\dots \quad (14)$$

En posant

$$\alpha C \cdot \beta A \cdot \gamma B - B\alpha \cdot C\beta \cdot A\gamma = d$$

et

$$CB'A' \cdot AC'B' \cdot BA'C' - BA'B' \cdot CB'C' \cdot AC'A' = D$$

il vient

$$d=\frac{a\,b\,c}{a'\,b'\,c'}\cdot\frac{D}{\Delta}\cdot l\cdot m\cdot n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Il est facile de voir qu'on a

$$D=\Delta'^2\left[\frac{A\,C'\,A'(C\,B'\,C'+\Delta')}{\Delta'}+\frac{B\,A'\,B'(A\,C'\,A'+\Delta')}{\Delta'}+\frac{C\,B'\,C'(B\,A'\,B'+\Delta')}{\Delta'}+\Delta'\right]$$

ou

$$D=\Delta'^2\left[\frac{A\,C'\,A'\cdot C\,B'\,A'}{\Delta'}+\frac{B\,A'\,B'\cdot A\,C'\,B'}{\Delta'}+\frac{C\,B'\,C'\cdot B\,A'\,C}{\Delta'}+\Delta'\right]. \quad (16)$$

et des relations

$$\frac{A\,C\,A'}{C\,B'\,A'}=\frac{A\,C'\,A'}{\Delta'},\ \frac{B\,A\,B'}{A\,C'\,B'}=\frac{B\,A'\,B'}{\Delta'},\ \frac{C\,B\,C'}{B\,A'\,C'}=\frac{C\,B'\,C'}{\Delta'} \ \ldots. \quad (17)$$

il résulte

$$D=\Delta'^2(A\,C\,A'+B\,A\,B'+C\,B\,C'+\Delta')=\Delta'^2\cdot\Delta \ \ldots. \quad (18)$$

et, en remplaçant cette valeur en (15), on aura enfin

$$d=\frac{a\,b\,c}{a'\,b'\,c'}\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 l\cdot m\cdot n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Obs.—Comme on sait, les côtés du triangle ABC indéfiniment prolongés, appelés *axes de référence,* déterminent dans le plan sept *régions* (fig. 1) ABC; $XBCZ'$, $YCAX'$, $ZABY'$; $X'AZ$, $Y'BX$, $Z'CY$; ordinairement numérotées 0; 1, 2, 3; 1', 2', 3'; et il est facile de reconnaître que, en tenant compte des signes des segments et des aires, cette formule est toujours vraie, quel que soit la position des sommets du triangle $A'B'C'$ dans ces régions.

Désignons les angles BAC, CBA, ACB par A, B, C; les angles $B'A'C'$, $C'B'A'$, $A'C'B'$ par A', B', C'; et les angles $BA\alpha$, $CB\beta$, $AC\gamma$ par γ, μ, υ.

Si l'on suppose que la variation de ces trois derniers angles, qu'on peut nommer *angles céviens*, a toujours lieu dans le sens positif ou negatif, c'est-à-dire qu'elle résulte de la rotation des céviennes $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ autour de A, B, C dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, ou dans le même sens de ces aiguilles, par rapport aux origines AB, BC, CA des inclinaisons de ces céviennes, on aura entre tous ces neuf angles les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} A'&=\upsilon-(\lambda-A)\\ B'&=\lambda-(\mu-B)\\ C'&=\mu-(\upsilon-C)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

En considérant les angles céviens $CA\alpha$, $AB\beta$, $BC\gamma$, que nous désignons par λ', μ', ν', et dont leur variation a de même toujours lieu dans le sens positif ou négatif, on aura

$$\left.\begin{array}{l} A'=\nu'-(\lambda'-C) \\ B'=\lambda'-(\mu'-A) \\ C'=\mu'-(\nu'-B) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

SECONDE SOLUTION

En employant la methode des équipollences, on a

$$\left.\begin{array}{l} B\alpha=x\cdot BC \\ C\beta=y\cdot CA \\ A\gamma=z\cdot AB \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(I)}; \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha C=(1-x)BC \\ \beta A=(1-y)CA \\ \gamma B=(1-z)AB \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(II)}$$

d'où

$$d=[(1-x)(1-y)(1-z)-xyz]\,abc \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Soient en outre

$$\left.\begin{array}{l} AA'=r\cdot A\alpha \\ BB'=s\cdot B\beta \\ CC'=t\cdot C\gamma \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(IV)}; \qquad \left.\begin{array}{l} AB'=n\cdot A\alpha \\ BC'=v\cdot B\beta \\ CA'=w\cdot C\gamma \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(V)}$$

où les valeurs de r, s, t; n, v, w, en fonction de x, y, z sont

$$\left.\begin{array}{l} r=\dfrac{z}{1-x+xz} \\ s=\dfrac{x}{1-y+xy} \\ t=\dfrac{y}{1-z+yz} \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(VI)}; \qquad \left.\begin{array}{l} u=\dfrac{1-y}{1-y+xy} \\ v=\dfrac{1-z}{1-z+yz} \\ w=\dfrac{1-x}{1-x+xz} \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(VII)}$$

et on aura

$$\Delta'=\frac{[(1-x)(1-y)(1-z)-xyz]^2}{(1-x+xz)(1-y+xy)(1-z+yz)}\cdot\Delta \ldots\ldots \text{(VIII)}$$

ou

$$(1-x)(1-y)(1-z)-xyz=\frac{(1-x+xz)(1-y+xy)(1-z+xz)}{(1-x)(1-y)(1-z)-xyz}\cdot\frac{\Delta'}{\Delta}. \text{(IX)}$$

En vertu des relations (VI), (VII), (IX), l'équipollence (III) devient

$$d = abc \cdot \frac{\Delta'}{\Delta} \cdot \frac{1}{uvw - rst} \quad \text{(X)}$$

Or, ayant égard aux relations (IV), (V), on aura

$$uvw - rst = \frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' - AA' \cdot BB' \cdot CC'}{lmn} \quad \text{(XI)}$$

et posant

$$\left.\begin{aligned} AA' &= x' \cdot A'B' \\ B'B' &= y' \cdot B'C' \\ C'C' &= z' \cdot C'A' \end{aligned}\right\} \quad \text{(XII)}$$

il en résulte

$$\left.\begin{aligned} AB' &= (1 - x')A'B' \\ BC' &= (1 - y')B'C' \\ CA' &= (1 - z')C'A' \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIII)}$$

d'où

$$uvw - rst = \frac{(1 - x')(1 - y')(1 - z') - x'y'z'}{lmn} \cdot a'b'c' \quad \text{(XIV)}$$

mais on sait que

$$\Delta = [(1 - x')(1 - y')(1 - z') + x'y'z]\Delta' \quad \text{(XV)}$$

donc

$$uvw - rst = \frac{a'b'c'}{lmn} \cdot \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

En remplaçant cette valeur en (X), on obtient l'expression demandée

$$d = \frac{abc}{a'b'c'} \cdot \left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 lmn \quad \text{(19)}$$

REMARQUE

Si les angles céviens λ, μ, υ sont toujours égaux entre eux les relations (20) donnent (fig. 2).

$$A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C$$

et, par suite, les triangles ABC, $A'B'C'$ seront directement semblables.

Dans ce cas les angles $AB'B$, $BC'C$, $CA'A$ étant toujours égaux

à $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - A$ *les lieux géométriques des sommets* B', C', A' *du triangle* A'B'C' *seront,* comme on sait, *les trois cercles adjoints* (AB), (BC), (CA), ou (O_c), (O_a), (O_b), *ayant respectivement pour cordes* AB, BC, CA; *pour centres* O_c, O_a, O_b; *et pour tangentes* BC, CA, AB; *et le point de rencontre* Ω *de ces cercles sera un des points de* Brocard, *dont l'angle correspondant est* $V = \lambda = \mu = \upsilon$.

Si au lieu de considérer le point d'intersection B' des céviennes $A\alpha$, $B\beta$, répondant aux angles $+\lambda$ et $+\mu = +\lambda$, on considère le point d'intersection B'' de la première cévienne avec la cévienne $B\beta'$, dont l'angle $CB\beta'$ est égale à $-\mu = -\lambda$, *le lieu géométrique de ce point* B'' *sera une hyperbole équilatère* (H_c), *ayant pour diamètre* AB, *touchant* BC *et le cercle adjoint* (O_c) *au point* B, *et le coupant aussi à l'extrémité* A_1 *de son diamètre* BO_cA_1.

En traçant le cercle (O_cH_c), concentrique à (O_c) et tangent en H_c à AB, il coupera BA_1 aux points e et g tels, que les droites H_ce et H_cg seront les asymptotes de cette hyperbole (H_c).

En considérant le point d'intersection C'' des céviennes $B\beta$, $C\gamma'$, répondant aux angles $+\mu$ et $-\upsilon = -\mu$, *le lieu de ce point* C'' *sera une autre hyperbole équilatère* (H_a), *ayant pour diamètres* BC, *touchant en* C *et coupant en* B_1 *le cercle adjoint* (O_a), *et dont les asymptotes sont* H_ae' *et* H_ag'.

Enfin si l'on prend le point d'intersection A'' des céviennes $C\gamma$ et $C\alpha'$ répondant aux angles $+\upsilon$ et $-\lambda = -\upsilon$, *on aura pour lieu géométrique de ce point* A'' *une troisième hyperbole équilatère* (H_b), *ayant pour diamètre* CA, *touchant en* A_1 *et coupant en* C_1 *le cercle* (O_b), *et dont les asymptotes sont* H_be'' *et* H_bg''.

A ces trois hyperboles on peut donner le nom d'*hyperboles adjointes.*

Comme on le voit, les diamètres BA_1, CB_1, AC_1 des trois cercles adjoints ou céviennes $B\beta_0$, $C\gamma_0$, $A\alpha_0$ déterminent un triangle $A_1B_1C_1$ directement semblable au triangle donné, ou tout à fait dans les mêmes conditions du triangle $A'B'C'$. Chacun des couples de points γ, γ'; α, α'; β, β', seront respectivement conjugués harmoniques par rapport aux couples de points fixes A, γ_0; B, α_0; C, β_0.

Si par les points A', B', C' on mène les cordes $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ des cercles (O_b), (O_c), (O_a) respectivement parallèles aux côtés AB, BC, CA du triangle ABC, elles déterminent le triangle $A_0B_0C_0$ qui lui est homothétique.

A ces cordes correspondent les cordes $A''A''_1$, $B''B''_1$, $C''C''_1$ des hyperboles (H_b), (H_c), (H_a). Ces hyperboles ont pour points d'intersection les points remarquables I_a, I_b, I_c (*).

Si l'on a $\lambda' = \mu' = \upsilon'$ les rapports (21) donnent

$$A' = C,\ B' = A,\ C' = B$$

et les triangles ABC et $B'C'A'$ seront aussi *directement semblables.*

(*) Plus tard, dans une note spéciale, nous ferons l'étude développée de ces hyperboles équilatères adjointes.

D'après cela les angles $BB'A$, $CC'B$, $AA'C$ étant toujours égaux à $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, les lieux des sommets B', C', A' seront, comme on sait, trois cercles adjoints (BA), (CB), (AC) ou (O'_c), (O'_a), (O'_b) ayant pour cordes BA, CB, AC, pour centres O'_c, O'_a, O'_b, et pour tangentes AC, BA, CB, dont le point d'intersection Ω' sera l'autre point de Brocard auquel répond l'angle $V' = \gamma' = \mu' = \nu'$ (*).

A ces trois cercles répondront trois autres hyperboles adjointes (H'_c), (H'_a), $H'_b)$, ayant pour diamètres respectivement les droites BA, CB, AC et pour tangentes AC, BA, CB.

(*) Il nous a paru inutile de figurer ce cas, attendu que nous n'entrons pas maintenant dans plus de détails.

Sur une question relative au triangle

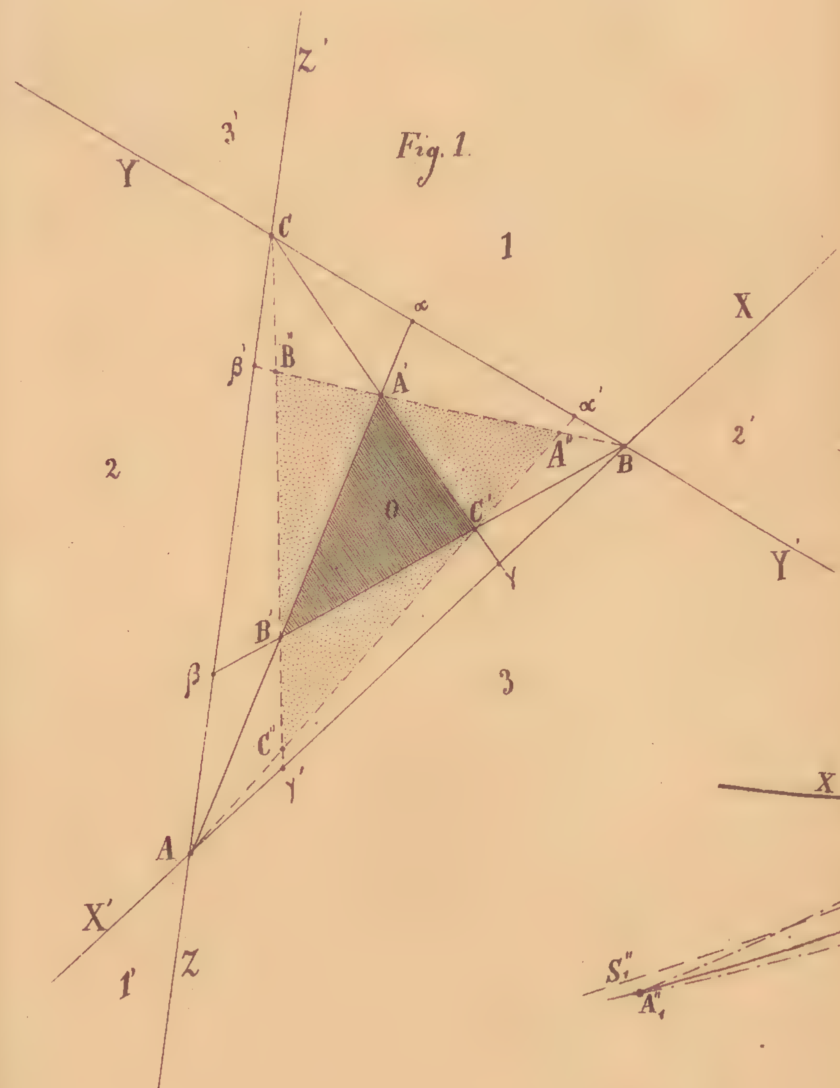


Fig. 2

SUR L'APPLICATION DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE DE QUATRIÈME ORDRE, COMME SURFACE AUXILIAIRE

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

La question que nous nous proposons de résoudre à l'aide de cet hyperboloïde a été énoncée par Poncelet de la manière suivante:

Étant données deux sections coniques quelconques (S), (S'), *sur un plan* (P), *déterminer la suite des centres et des plans de projection tels, que ces sections coniques soient représentées par deux cercles.*

Une question analogue, ainsi que la démonstration du principe qui en est la conséquence, a été proposée dans le tome VII des *Annales de Mathématiques;* et Brinauchon a aussi étudié antérieurement ce principe, sans s'occuper de la démonstration, dans le dixième cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

Poncelet supposait que l'analyse devait naturellement conduire, dans tous les cas, pour la courbe, lieu des centres auxiliaires de projection, à une équation du 12e degré, décomposable en facteurs du 2e degré représentant autant de cercles, mais inséparables d'une manière purement rationelle (1818).

A fin de procéder avec ordre, nous présenterons d'abord le résultat des notables recherches faites par Poncelet sur cette question, ou la solution énoncée par ce grand géomètre dans le théorème suivant:

Tous les points de l'espace qui sont susceptibles de projeter à la fois, suivant des cercles, deux sections coniques quelconques (S), (S') *situées sur un même plan* (P), *sont distribués sur autant de cercles déterminés qu'il y a des cordes idéales communes aux deux courbes proposées. Ces cercles sont situées dans des plans respectivement perpendiculaires sur le milieu de chacune de ces cordes, ils ont précisement ces milieux pour centres, et pour diamètre respectif la partie interceptée par chaque corde idéale dans les sections coniques supplémentaires des proposées, qui correspondent à cette même corde. Enfin, le plan de projection, qui donne à chaque fois*

des sections circulaires, est parallèle à celui qui passe par la corde idéale et par le centre de projection considéré en particulier.

Obs.— Comme on le voit le problème n'aura de solution que si les coniques (S), (S') ont des cordes idéales communes.

Nous nous sommes occupés de cette même question ou problème en 1867 synthétiquement et analytiquement avec tout développement, mais nous n'avons pas publié notre solution, que nous présentons maintenant par une voie analytique que nous rendrons aussi courte que possible.

Pour cela, nous supposerons que l'une des coniques est un ellipse (S) et l'autre un cercle (C), ce qui ne particularise nullement l'état de la question; puisque d'ailleurs tous les cas peuvent se réduire à celui-ci à l'aide de la projection centrale.

Comme il y a une infinité de plans qui, en passant par les cordes idéales communes de (S), (C), et par le centre de projection V, sont parallèles aux plans de projection, qui donnent des sections circulaires, nous pouvons aussi considérer ceux de ces plans qui sont perpendiculaires au plan (P) des deux courbes: ce qui répond bien à la question proposée sans restriction.

Cela étant, prenons les demi-axes $OA=a$ et $OB=b$ de l'ellipse (S) pour axes des x et des y; et la perpendiculaire OZ à ces axes pour axe des z. Soient h et k les coordonnées du centre C du cercle (C), dont le rayon est r.

D'après cela, *le lieu des sommets* V, ... *des cônes, qui en s'appuyant sur la conique* (S) *sont coupés suivant des cercles par des plans perpendiculaires au plan* (P) *de cette courbe, est la surface donnée par l'équation:*

$$a^2b^2(a^2y^2+b^2x^2)z^2-(a^4y^2+b^4x^2)(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0\ldots \quad (1)$$

Le lieu des sommets v, ... *des cônes, qui s'appuient sur le cercle* (C), *et qui se trouvent en des conditions analogues, aura pour équation:*

$$z^2-(y-k)^2-(x-h)^2+r^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En considérant dans l'ellipse (S) et dans le cercle (C) des couples de diamètres parallèles entre eux, les couples de diamètres respectivement conjugués de ceux-ci se couperont sur une conique (H) passant par les centres O et C des coniques données, *laquelle représentera les milieux de cordes de ces coniques parallèles aux premiers couples de diamètres,* et l'équation de cette courbe sera:

$$(a^2-b^2)xy-a^2hy+b^2kx=0\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

équation qui représente aussi *une surface cylindrique perpendiculaire au plan* (P).

La première surface (1) peut se nommer *hyperboloïde à une nappe du quatrième ordre* (*); la seconde (2) est, comme on sait, un *hyperboloïde à une nappe de révolution;* et la troisième (3) *une surface cylindrique hyperbolique,* ayant pour trace l'*hyperbole équilatère d'Apollonius.*

C'est l'intersection de ces trois surfaces qui donne les sommets communs des cônes demandés.

Ayant déterminé ainsi analytiquement ces sommets, on aura les cercles qui représentent les positions des autres sommets relatives à des plans de projections obliques par rapport au plan (P).

Si le cercle (C) était remplacé par autre ellipse (S') la seconde surface (2) serait de même remplacée par un autre *hyperboloïde à une nappe du quatrième ordre,* et la troisième surface (3), aurait alors pour trace une autre conique *lieu des points de rencontre des couples de diamètres des ellipses* (S), (S'), *conjugués respectivement des couples de diamètres de celles-ci parallèles entre eux, et cette conique passera aussi par* O *et* C, *centres des faisceaux homographiques générateurs de cette courbe.* Nous croyons que Poncelet ne connaissait pas l'ordre de cette courbe.

Obs.— Comme on le voit la surface (2) se réduit à un *hyperboloïde de revolution à une nappe,* lorsque l'ellipse de *gorge* (S) devient un cercle.

(*) Nous croyons que cette surface n'est pas encore connue.

SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA SÉRIE HARMONIQUE

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Nous allons donner la démonstration d'un théorème qui a été présenté comme question proposée, en avril 1897, sous le n° 802, dans le *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales,* publié par le savant professeur M. G. de Longchamps (*), et dont l'énoncé est le suivant:

Prouver que $(n-1)!\sum_2^n \frac{1}{n-1}$ *est divisible par* n (impair).

(Scholarships, St. John's College, Cambridge).

DÉMONSTRATION

Si n est impair le nombre de termes de la série harmonique

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-3}+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\ \ldots\ldots\ (1)$$

sera pair; et si l'on ajoute deux par deux les termes équidistants des extrêmes on aura la série

$$\left[\frac{1}{1(n-1)}+\frac{1}{2(n-2)}+\ldots+\frac{1}{\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n+3}{2}}+\frac{1}{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}\right]n$$

composée de $\frac{n-1}{2}$ termes.

(*) Notre démonstration n'a pas été alors publiée parceque M. de Longchamps avait quitté la direction de ce Journal.

D'après cela la formule proposée se transforme dans la suivante:

$$n\,!\sum_{2}^{n}\frac{1}{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

qui sera divisible par n (impair).

Q. e. d.

SOBRE A THEORIA DOS LOGARITHMOS DE ORDEM N

POR

ANTONIO CABREIRA

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias

---

1. Consideremos duas espiraes, uma logarithmica e outra de Archimedes, com as caracteristicas geometricas eguaes e coincidentes.

2. *O logarithmo de primeira ordem do vector da espiral logarithmica é egual á relação entre o seu vector equiangular, na espiral de Archimedes, e a caracteristica geometrica.*

Comparando as equações

$$r^{(l)} = \alpha^{\frac{\theta}{\pi}} \quad \text{e} \quad r^{(A)} = \frac{\theta}{\pi}\alpha,$$

vem

$$r^{(l)} = \alpha^{\frac{r^{(A)}}{\alpha}};$$

d'onde

$$\log r^{(l)} = \frac{r^{(A)}}{\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

3. *O producto dos vectores da espiral logarithmica é egual a outro vector, cujo equiangular, na espiral de Archimedes, representa a somma dos vectores d'esta curva, respectivamente, equiangulares d'aquelles.*

Effectivamente, de

$$\log r^{(l)} + \log r'^{(l)} + \ldots = \frac{r^{(A)} + r'^{(A)} + \ldots}{\alpha} = \frac{R^{(A)}}{\alpha} = \log R^{(l)}$$

deduz-se

$$r^{(l)} r'^{(l)} \ldots = R^{(l)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

4. *O quociente de dois vectores da espiral logarithmica é egual a outro vector, cujo equiangular, na espiral de Archimedes, representa a differença dos vectores d'esta curva, respectivamente, equiangulares d'aquelles.*

Partindo de

$$\log r^{(l)} - \log r'^{(l)} = \frac{r^{(A)} - r'^{(A)}}{\alpha} = \frac{R^{(A)}}{\alpha} = \log R^{(l)},$$

conclue-se

$$\frac{r^{(l)}}{r'^{(l)}} = R^{(l)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

5. *A potencia de ordem* n *do vector da espiral logarithmica é egual a outro vector, cujo equiangular, na espiral de Archimedes, representa* n *vezes o vector d'esta curva, equiangular d'aquelle.*

De (1) tira-se

$$n \log r^{(l)} = \frac{n\, r^{(A)}}{\alpha} = \log R^{(l)};$$

logo

$$r^{(l)\,n} = R^{(l)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

6. *A raiz de ordem* n *do vector da espiral logarithmica é egual a outro vector, cujo equiangular, na espiral de Archimedes, representa* $\frac{1}{n}$ *vezes o vector d'esta curva, equiangular d'aquelle.*

De (1) conclue-se

$$\frac{1}{n} \log r^{(l)} = \frac{\frac{r^{(A)}}{n}}{\alpha} = \log R^{(l)};$$

portanto

$$r^{(l)\frac{1}{n}} = R^{(l)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

7. *O producto dos logarithmos de primeira ordem de* n *vectores da espiral logarithmica, é egual ao logarithmo de primeira ordem de outro vector, cujo equiangular, na espiral de Archimedes, representa a relação entre o producto dos vectores d'esta curva, respectivamente, equiangulares dos vectores dados, e a potencia de ordem* n — 1 *da caracteristica geometrica.*

Assim succede desde que

$$\log r^{(l)} \log r'^{(l)} \ldots = \frac{r^{(A)} r'^{(A)} \ldots}{\alpha^n} = \frac{\frac{R^{(A)}}{\alpha^{n-1}}}{\alpha} = \log R^{(l)} \ldots\ldots (6)$$

8. *O quociente dos logarithmos de primeira ordem de dois vectores da espiral logarithmica é egual ao producto da caracteristica geometrica*

pelo logarithmo de primeira ordem do vector, cujo equiangular, na espiral de Archimedes, representa o quociente dos vectores d'esta curva, respectivamente, equiangulares dos vectores dados.

Sendo

$$\frac{\log r^{(l)}}{\log r'^{(l)}} = \frac{r^{(A)}}{r'^{(A)}},$$

vem, dividindo ambos os membros d'esta egualdade por α,

$$\frac{\dfrac{\log r^{(l)}}{\log r'^{(l)}}}{\alpha} = \frac{\dfrac{r^{(A)}}{r'^{(A)}}}{\alpha} = \log R^{(l)};$$

logo

$$\frac{\log r^{(l)}}{\log r'^{(l)}} = \alpha R^{(l)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

9. *O logarithmo de ordem* 2n *do vector da espiral logarithmica é egual ao quociente da differença entre o vector da espiral de Archimedes, equiangular do vector d'aquella espiral que dividido pela caracteristica geometrica determina o logarithmo de ordem* 2n — 1 *do vector dado, e a caracteristica geometrica, por esta mesma grandeza.*

De (1), deduz-se

$$\log \log r^{(l)} = \log r^{(A)} - 1.$$

Considerando $r^{(A)}$ como outro vector da espiral logarithmica e chamando $r_2^{(A)}$ ao seu vector equiangular, na espiral de Archimedes, fica, em virtude de (1),

$$\log \log r^{(l)} = \frac{r_2^{(A)} - \alpha}{\alpha}.$$

Imaginando, em seguida, que $r_2^{(A)} - \alpha$ é um terceiro vector da espiral logarithmica e que $r_3^{(A)}$ constitue o seu vector equiangular, na espiral de Archimedes, vem

$$\log \log \log r^{(l)} = \frac{r_3^{(A)} - \alpha}{\alpha}.$$

Raciocinando, successivamente, por este modo, resulta, finalmente,

$$\log^{(2n)} r^{(l)} = \frac{r_{2n}^{(A)} - \alpha}{\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

10. *O producto do vector da espiral logarithmica, pelos seus* 2n *logarithmos successivos é egual a outro vector cujo equiangular, na espiral de Archimedes, representa a somma dos vectores equivalentes ao producto da caracteristica geometrica pelos referidos logarithmos.*

Sabemos que

$$\log r^{(l)} + \log^{(2)} r^{(l)} + \ldots + \log^{(2n+1)} r^{(l)} = \frac{r_1^{(A)} + r_2^{(A)} + \ldots + r_{2n+1}^{(A)} - 2n\alpha}{\alpha} =$$

$$= \log r^{(l)} + \log\log r^{(l)} + \ldots + \log\log^{(2n)} r^{(l)} =$$

$$= \log (r^{(l)} \log r^{(l)} \ldots \log^{(2n)} r^{(l)}) = \frac{S}{\alpha} = \log R^{(l)};$$

portanto

$$r^{(l)} \log r^{(l)} \ldots \log^{(2n)} r^{(l)} = R^{(l)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

11. *O quociente de dois logarithmos de ordem* 2m *e* 2n *do vector da espiral logarithmica representa o vector que tem como equiangular, na espiral de Archimedes, a differença entre os vectores d'esta curva, equiangulares dos vectores da espiral logarithmica que, divididos pela caracteristica geometrica determinam, respectivamente, os logarithmos de ordem* 2m *e* 2n *do vector dado.*

Effectivamente,

$$\log^{(2m+1)} r^{(l)} - \log^{(2n+1)} r^{(l)} = \log\log^{(2m)} r^{(l)} - \log\log^{(2n)} r^{(l)} =$$

$$\log \frac{\log^{(2m)} r^{(l)}}{\log^{(2n)} r^{(l)}} = \frac{r_{2m+1}^{(A)} - r_{2n+1}^{(A)}}{\alpha} = \log R^{(l)};$$

logo

$$\frac{\log^{(2m)} r^{(l)}}{\log^{(2n)} r^{(l)}} = R^{(l)}. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

12. *A potencia de ordem* n *do logarithmo de ordem* 2n *do vector da espiral logarithmica é equal ao logarithmo de primeira ordem de outro vector, cujo equiangular, na espiral de Archimedes, representa a relação entre a potencia de ordem* n *do vector equivalente ao producto da caracteristica geometrica pelo logarithmo dado e a potencia de ordem* n — 1 *da mesma caracteristica geometrica.*

Elevando (8) á potencia de ordem n, fica

$$(\log^{(2n)} r^{(l)})^n = \frac{\dfrac{(r_{2n}^{(A)} - \alpha)^n}{\alpha^{n-1}}}{\alpha} = \log R^{(l)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

13. *A derivada do logarithmo de ordem* n *do vector da espiral logarithmica, em relação ao angulo polar, é egual ao logarithmo de primeira ordem do vector, cujo equiangular, na espiral de Archimedes, representa a sub-normal a esta curva.*

Com effeito,

$$\frac{d \log^{(n)} r^{(l)}}{d\theta} = \frac{S_n^{(A)}}{\alpha} = \log R^{(l)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

14. Para applicar aos numeros as formulas, que ficam deduzidas, basta represental-os, segundo uma escala qualquer, por vectores da espiral logarithmica e fazer as construcções geometricas que facilmente se imaginam, em presença das mesmas formulas.

L'UNIFICATION INTERNATIONALE DE L'HEURE

PAR

M. J. DE REY-PAILHADE

Ingénieur civil des mines et Président de la Société de Géographie de Toulouse

---

1.—Depuis quelque temps, les revues scientifiques et même la presse quotidienne, s'occupent beaucoup de l'unification internationale de l'heure. Les livres, brochures, mémoires et articles publiés sur ce sujet, sont déjà extrêmement nombreux[1]. La question a d'ailleurs une très grande importance, car elle intéresse les savants, les commerçants et aussi le public.

L'humanité s'est toujours beaucoup préoccupée de l'heure, c'est-à-dire, de la mesure du temps. L'antiquité et le moyen âge n'avaient en vue que le temps local; mais de nos jours, à la fin de ce XIX[e] siècle, tout à la vapeur et à l'électricité, où les sciences deviennent de plus en plus internationales, ce problème se complique d'un desideratum nouveau.

---

[1] Application du système métrique décimal à l'hydrographie et aux calculs de la navigation; moyens pour en faciliter l'établissement et tables à cet usage, par M. de Fleurien, Paris, an VIII.

Notes sur les mesures décimales du cercle, par MM. d'Abbadie, Yvon Villarceau et Wolf, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences,* 1870.

Programme raisonné d'un système de géographie fondé sur l'usage des mesures décimales par M. de Chancourtois, 1894, Gauthier Villars.

Essai sur l'unification internationale de l'heure et temps décimal, par J. de Rey-Pailhade, 1894, *Bull. Soc. géogr. de Toulouse.*

Le Temps décimal, par J. de Rey-Pailhade, 1894, Gauthier Villars.

Étude sur un projet d'unification des heures par M. Bellot, capitaine de frégate, dans *Bull. Soc. géogr. de Rochefort,* 1894.

L'unification internationale de l'heure, par M. Floquet, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, dans *Bull. Soc. géogr. de l'Est,* 1894.

Le Temps décimal, par M. Gerard Lavergne, ancien élève de l'École polytechnique, *Génie civil,* 21 juillet 1894.

Sur les modifications à apporter dans la graduation des méridiens et paral-

Quand on dit qu'un événement s'est produit à tel endroit à un moment determiné, le renseignement fourni est incomplet. L'heure de l'Amérique diffèrant beaucoup de celle du Portugal, il faut, pour connaître véritablement la succession des faits arrivant sur la terre, transformer les heures des autres peuples en heures portugaises.

---

lèles en cartographie. Réponse à une question de la Société de géographie de Paris, par J. de Rey-Pailhade, dans *Bull. Soc. géogr. de Toulouse*, 1894.

Le XVe congrès des Sociétes de géographie, par M. Sevin Desplaces, archiviste du Musée du Louvre, *Nouvelles géographiques*, octobre 1894.

Note sur le temps décimal, par M. Krannass, dans *Soc. scientifique du Chili*, octobre 1894.

Application simultanée du temps décimal aux mesures du temps et des angles. Rapport au congrès international de géographie de Londres, *Bull. Soc. géogr. de Toulouse*, 1895.

Sur l'extension du système décimal au temps et à la circonférence, *Revue scientifique*, 20 juillet 1895.

Compte-rendu officiel du congrès international de géographie de Londres. London, 1896, John Murray.

L'heure décimale et la division de la circonférence, par M. de Sarrauton, dans *Bull. Soc. géogr. d'Oran*, 1895.

Revue scientifique du 25 avril 1896, note de M. Gaston Moch sur le temps décimal.

Lettre à M. le Ministre de l'Instruction publique sur l'extension du système décimal aux mesures du temps et des angles, par J. de Rey-Pailhade, *Bull. Soc géogr. de Toulouse*, 1896.

Décimalisation du temps et des angles, par M. Bouquet de la Grye, de l'Institut, *Société astronomique de France*, février 1897.

L'heure décimale, par M. de Sarrauton, *Revue scientifique*, 8 août 1896.

Extension du système décimal aux mesures du temps et des angles, *Revue scientifique*, 31 octobre 1896 et 2 janvier 1897.

Projet d'éphémérides astronomiques et géographiques dans le système décimal, par M. J. de Rey-Pailhade. Toulouse 1896, Lagarde et Sebille.

Note sur la division décimale du temps et des angles, par M. Bouty, centrôleur principal des revues. Oran 1896, Fouque.

Rapport de la commission spéciale sur les temps décimal, dans *Bull. Soc. géogr. de Toulouse*, 1897, M. Litre, rapporteur.

Le temps décimal et les unités électriques, *Génie civil*, 2 mai 1897 et la *Nature*, 1er mai 1897.

Résumé des séances de la commission ministérielle de décimalisation du temps et de la circonférence, *Moniteur* de mars et avril 1897.

Décimalisation du temps et de la circonférence, par A. Cornu, de l'Institut et du Bureau des longitudes, dans *Eclairage électrique* du 22 mai 1897.

Conférence sur l'extension du système décimal aux mesures du temps et des angles, par J. de Rey-Pailhade. Toulouse, 1897.

L'unification internationale des heures, par Ch. Lallement, *Le Génie moderne*, 1897.

Tables trigonométriques à huit décimales dans le division décimale du cercle entier, par M. de Mendizabal y Tamborrel. Paris, 1891.

L'unification des heures, par M. de Nordling, *Bulletin de la Société de Géographie*, 1890.

Une question à résoudre en 1900: l'heure et la longitude universelles, *Revue scientifique*, 1898, p. 783.

Le project de loi sur l'unification horaire, par M. de Nordling, *Le Génie civil*, t. XVII, p. 115.

L'unification de l'heure par l'amiral Serre, *Le Génie civil*, t. XVII, p. 364.

L'unité du premier méridien. L'unité de l'heure, idem, t. VI, p. 103 (R. G.).

Il y a là une difficulté pratique qui montre que la vie moderne si active, est en face du problème suivant à résoudre:

Trouver un moyen commode d'écrire les heures de chaque nation, de manière que cette heure précise soit transformée immédiatement en heure de n'importe quelle autre nation.

Cette question exigerait des developpements considérables, que je ne puis pas donner. Je me bornerai à traiter ce sujet à grands traits.

2.— Plusieurs congrès internationaux se sont réunis à cet effet, mais aucun résultat pratique n'est sorti de ces conférences.

Remarquons tout d'abord, que jamais on n'adoptera une heure universelle pour le public[1]. C'est une utopie sur laquelle il n'y a pas à insister.

Jamais, en effet, aucun peuple ne voudra accepter un système qui lui fera dire midi quand le soleil se lève; le terme de *midi*, ne peut s'appliquer qu'au milieu du jour. Il arriverait aussi, par suite des 24 heures d'avance qu'on a en Orient sur l'Europe, qu'un évènement arrivé à Lisbonne le 5 mai, par exemple, serait enregistré à Auckland comme étant arrivé le 6, et que réciproquement, un télegramme envoyé d'Aukland à la date du 6, arriverait en Portugal le 5, c'est-à-dire, la *veille*.

Mais ce qui est impraticable pour le public, peut être employé utilement pour les usages uniquement scientifiques, parce que les savants que s'en serviront n'en éprouveront aucun inconvénient dans la vie pratique.

Le savant, en effet, a en quelque sorte un usage double; il y a chez lui l'existence ordinaire matérielle, (s'il est permis de s'exprimer ainsi), semblable à celle de tout le monde, et ensuite l'existence scientifique, qui se traduit par des travaux de cabinet n'ayant que des rapports très éloignés avec la vie commune du public.

3.— Examinons maintenant les diverses solutions qui ont été proposées pour résoudre ce grave problème de l'unification internationale de l'heure.

---

[1] En 1883, dans une conférence tenue à Rome, l'Association géodésique européenne (devenue, en 1886, l'Association géodésique internationale) proposait, comme méridien initial universel, le méridien de Greenwich, et cela malgré l'opposition des savants français qui, objectant à ce projet son caractère national, réclamaient un méridien absolument *neutre*, tel que celui de l'Ile de Fer ou celui du détroit de Behring...

Comme on pourrait s'y attendre, toutes les tentatives échouèrent.

Admissible à la rigueur, pour les pays voisins du méridien fondamental, la substitution d'une heure universelle à l'heure local, ou même à l'heure nationale, eût bouleversé d'une manière inacceptable, dans les pays éloignés, les habitudes publiques et les usages de la vie privée (R. G.).

Un canadien distingué, M. Fleming, a proposé un système assez convenable: on diviserait la terre en 24 fuseaux, ou zones égales, de 15° de longitude, qui auraient chacune une même heure sur toute leur étendue. Le temps de chaque zone différerait de celui de ses voisines d'un 24ᵉ de jour, ou *une heure*. Le jour commencerait à l'extrémité orientale de l'Asie, a fin de respecter la tradition historique que fait dater le jour par les pays orientaux. Le Portugal serait dans le 13ᵉ fuseau, New-York dans le 17ᵉ et San-Francisco dans le 21ᵉ.

Par exemple, un tremblement de terre a eu lieu en Californie (21ᵉ fuseau) à $5^h\,27^m$ du matin, il était au même moment en Portugal, $5^h\,27^m$, plus la différence des numéros des fuseaux $21-13=8$, soit $5^h\,27^m+8^h=13^h\,27^m$, soit $1^h\,27^m$ du soir.

4.— Ce système assez simple en théorie, présente de sérieuses difficultés pratiques, parce qu'on ne peut pas diviser régulièrement les diverses nations en zones, différant d'une heure. Il faut quelquefois augmenter de près d'une heure, le temps local de certaines régions éloignées du centre moyen, ce qui présente toujours quelques inconvénients.

Les villes pour ces motifs n'ont pas toujours voulu adopter l'heure du système des fuseaux. Il en résulte une différence toujours fâcheuse entre l'heure des villes et l'heure des chemins de fer, qui ont accepté ce système, qui a d'ailleurs été créé par un congrès des directeurs des principales compagnies de chemins de fer des États-Unis.

Un autre inconvénient provient de la cartographie. On comprend que le jour où on aura accepté un pareil système, il faudra refaire toutes les cartes avec des méridiens se rapportant à ce nouvel état de choses. Or, l'Angleterre et l'Amérique qui suivent le méridien de Greenwich ont la prétention d'imposer leur cartographie à toutes les nations.

A fin de mettre tout le monde d'accord, M. Tondini de Quarenghi a proposé d'adopter le méridien de Jerusalem et de prendre cette ville pour origine du temps et du calendrier universel et international. Son idée n'a pas été admise, mais il est fortement question de prendre le méridien initial vers le détroit de Behring.

M. Bouquet de la Grye, propose de telle sorte qu'il passe dans l'hémisphère opposé par Florence, cette ville n'étant pas une capitale, son choix susciterait moins de difficultés.

Il n'est pas sans intêret de rappeler que l'idée de prendre un méridien initial comme premier méridien et origine du jour universel ne date pas d'hier.

Dès 1632, l'astronome Puteanus, de Louvani, a proposer d'adopter le méridien de Rome, comme premier méridien, dans une curieuse brochure intitulée: *Circulus urbanianus sen linea archemerine compendio descripta,* Lovanii, 1639.

L'établissement des chemins de fer a fait faire des progrès à cette question, en décidant les divers gouvernements à adopter le *temps national*, c'est-à-dire, une heure unique pour toute l'étendue d'une na-

tion[1]. On comprend aisément, qu'il suffirait d'avoir le tableau en *temps universel* ou *international* de chaque nation, pour pouvoir faire rapidement la transformation des heures. Chaque nation dresserait un tableau indiquant l'avance ou le retard avec l'heure des autres peuples.

Ainsi le temps national portugais retarde de $36^m 45^s$ sur le temps de Greenwich et de $46^m 6^s$ sur le temps national français. Un événement arrivé à Lisbonne à $10^h 12^m 47^s$ (heure portugaise) devient

$$\begin{array}{r} 10^h\,12^m\,47^s \\ +\quad 36^m\,45^s \\ \hline 10^h\,49^m\,32^s \end{array} \text{ en temps anglais}$$

ou bien

$$\begin{array}{r} 10^h\,12^m\,47^s \\ +\quad 46^m\;\;6^s \\ \hline 10^h\,58^m\,53^s \end{array} \text{ en temps français.}$$

5.—Le système des fuseaux est incontestablement plus simple, puisque la différence des temps est toujours un nombre exact d'heures. Plusieurs administrations de chemins de fer en Europe, ont accepté ce système en adoptant, comme guide, le temps du méridien de Greenwich.

Ainsi, les chemins de fer anglais (mais pas ceux d'Irlande) et les chemins de fer hollandais, ont tous la même heure de Greenwich, c'est ce qu'on appelle l'heure de l'Europe occidentale; en Italie, en Suisse, en Allemagne, en Autriche-Hongrie, en Servie, les chemins de fer ont adopté l'heure de l'Europe centrale, qui est celle de Greenwich plus 1^h. Donc, quand il est $2^h 30^m$ sur les chemins de fer belges, il est $3^h 30^m$ sur les chemins de fer allemands, italiens, etc.

Enfin, la Turquie, la Bulgarie et la Russie, ont pris l'heure orientale qui est celle de Greenwich plus 2 heures.

Le Portugal, l'Espagne et la France, n'ont pas accepté cette manière de voir, qui présente certains inconvénients.

Quelques pays ont adopté pour toutes les horloges, l'heure des chemins de fer, de sorte que dans certaines villes situées à la frontière, comme, par exemple, Genève en Suisse, il y a une différence de une heure entre l'heure des horloges et le temps local. Il y aura toujours des inconvénients à avoir de trop grands écarts entre la durée de la matinée et la durée de la soirée. En Allemagne, plusieurs établissemens publics qui étaient obligés de fermer à heure fixe, ont eu le dommage de voir diminuer leurs affaires, par suite d'une réduction dans le temps accordé à l'ouverture de leur établissement. Ainsi, un café à Genève fermant à minuit légal, perd 35 minutes sur le minuit du temps moyen du lieu.

---

[1] Cette unification intérieure, a été opérée en Angleterre, depuis près d'un demi-siècle; en France par la loi du 15 mars 1891 (R. G.).

D'après ce que nous avons dit, si le Portugal acceptait d'heure de Greenwich, elle avancerait toujours de $36^m 45^s$ sur le temps local; et s'il prenait Greenwich moins une heure, elle retarderait de $23^m 15^s$ sur le temps local.

Pour bien faire, il devrait prendre Greenwich moins une demi-heure seulement, ce qui ne ferait qu'une avance de $6^m 45^s$.

6.—L'usage de partager la journée en deux périodes de 2 fois 12 heures, est très incommode, surtout pour l'indication du jour et de la nuit dans les horaires de chemins de fer.

Pour éviter ces inconvénients, les astronomes ont toujours employé la succession des 24 heures comptées sans interruption d'un jour à l'autre.

Le Canada, les Indes Anglaises, l'Italie et la Belgique, viennent d'adopter cette méthode vraiment rationelle pour compter le temps.

Le public s'y est habitué très vite et s'en trouve bien. L'industrie horlogère a déjà créé des montres et des pendules qui dispensent de faire le petit calcul, consistant à ajouter 12 aux heures du soir.

Ainsi à

1- 2- 3- 4- 5- 6- 7- 8- 9-10-11-12^h du soir

correspondent

13-14-15-16-17-18-19-20-21-22-23-24^h

Quand on dit 21 heures, il n'y a pas d'erreur possible, c'est le soir, c'est l'heure qui correspond à 9^h du soir.

Un des moyens des plus simples, est d'inscrire sur chaque montre ou pendule, en chiffres arabes, au dessus des chiffres ou caractères romains, les heures du soir 13, 14, 15, . . . 23, 24.

Les montres du XVe siècle n'avaient qu'une aiguille et étaient presque toutes graduées de la sorte. Il faut donc reconnaître que l'emploi des 24 heures consécutives n'est qu'un retour vers le passé.

7.—Les délégués du Brésil, du Portugal, de l'Espagne et de la France, au congrès international de Washington (1884), pour l'unification internationale de l'heure, ont refusé d'adopter l'heure de Greenwich, pour deux raisons principales: 1e Défaut de neutralité de ce méridien; 2e Nécessité d'appliquer le système décimal aux mesures du temps et des angles.

J'ai défendu énergiquement cette idée au congrès international de géographie de Londres, en 1895, où sur ma proposition a été émis le vœu que les Sociétés de géographie étudiassent l'application du système décimal aux mesure du temps et des angles[1].

---

[1] *Liste des vœux émis pour l'application du système décimal aux mesures du temps et des angles:*

1885 — Commission du 22 novembre nommée par M. le Ministre de l'Instruction publique de France, pour l'étude de cette question.

Ce sujet a déjà donné lieu à de vifs débats dans les journaux scientifiques, qui s'accordent cependant tous à reconnaître l'urgence d'introduire le système décimal dans la mesure du temps[1].

En adoptant, comme je propose le centième du jour pour l'unité pratique de temps, que j'appelle *cé,* les calculs deviennent d'une facilité extrème.

Dans un seul nombre décimal, on écrit la date et le temps. Ainsi, décembre 2366^{c},9, signifie le 23 décembre à 66 *cés* et 9 décicés.

Si c'est l'heure du Portugal et qu'on veuille connaître l'heure correspondante de Sydney, il suffit de regarder sur une carte graduée en 100 parties, comme le temps, et on trouve que la longitude de Sydney par rapport à Lisbonne est à l'orient à 44^{c},5. On ajoute ce nombre au temps et on trouve

2366,9 temps portugais
+44,6 longitude de Sydney
2411,4

c'est-à-dire que la date est augmentée d'un jour.

Ce procédé extrémemement précis et commode pour les calculs, donne tous les renseignements possibles au moyen de l'usage des nombres décimaux[2].

1894 — Vœu émis par le Congrès de géographie, tenu à Lyon.
1894 — Vœu émis par la Section de géographie au Congrès des sociétés savantes à la Sorbonne.
1895 — Vœu émis par le Société de topographie de France.
1895 — Vœu émis par la Société astronomique de France.
1895 — Vœu émis par le Congrès international de géographie, tenu à Londres.
1895 — Vœu de l'Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Bordeaux.
1895 — Vœu du conseil général d'Oran en faveur de l'emploi de l'heure décimale.
1896 — Vœu de la Section de mathématiques au Congrès de la Sorbonne. (R. G.).

[1] Voici comme M. A. Cornu, membre de l'Institut et du bureau des longitudes, s'exprime dans un article inséré dans l'*Éclairage électrique,* du 22 mai, 1897:

«Trois des unités irréductibles de la mécanique, la longueur, le temps, la «masse, deux ont déjà été *décimalisées:* l'unité de temps, seule, dernière survi«vante du système duodecimal, a résisté à tous les efforts. Mais le moment appro«che ou elle devra, à son tour, entrer dans le concert des unités décimales.

«En résumé, la seule solution à la fois simple et scientifique d'une division «décimale, c'est le choix du jour et celui de la circonférence comme unités, car ce «sont là les *vraies périodes*».

Le rôle des hommes de science doit être d'en préparer l'avancement, non pas par des compromis, mais par l'adoption progressive de ce double système dans le domaine où il sont maîtres des conventions. (R. G.).

[2] Le système préconisé par M. de Rey-Pailhade, se résume en ceci: 1° partager le jour entre en 100 *cés,* divisés décimalement en *decicés, centicés, millicés* et *dimicés;* 2° partager le cercle entier en 100 *cirs,* divisés décimalement en *décicirs, centicirs, millicirs* et *dimicirs;* 3° graduer les cartes de géographie dans la nouvelle division du cercle en *cirs.*

Dans ces conditions, la longitude d'une ville, correspond exactement à la dif-

Il y a donc lieu de se féliciter que toutes les nations n'aient pas adhéré à l'heure de Greenwich[1], et que plusieurs ayent le louable désir de terminer l'œuvre du système métrique décimal. Avec notre système actuel des heures, minutes, etc, ce qui gêne, c'est l'impossibilité d'employer le système décimal, car pour ajouter une $^1/_2$ heure, il faut faire un calcul assez compliqué: ainsi, à $4^h\,49^m$ plus 30^m correspond $5^h\,19^m$, ce qui exige un petit effort de pensée.

Avec le système décimal, chaque *cé* valant presque exactement un quart d'heure, on pourra partager la terre en fuseaux de 4 *cés,* ou de 2 *cés,* suivant le cas.

Par exemple, le Portugal adopterait, je suppose Greenwich moins 2 *cés,* valant $2 \times 0^h{,}24 = 0^h{,}48 = 0^h{,}48 \times 60^m = 28^m{,}8 = 28^m\,48^s$, de sorte que les horloges ainsi réglées n'avanceraient que de $7^m\,47^s$ sur le temps local de Lisbonne et les transformations se feraient de tête.

Ainsi, le temps daté: novembre $2366^c{,}9$, deviendrait en temps anglais — novembre $2368^c{,}9$, ou ajoutant simplement 2 *cés.* Les calculs se feraient aussi facilement qu'avec des heures entières[2].

---

férence en temps décimal, entre la ville, où passe le premier méridien, — Lisbonne, par exemple — et la ville considérée.

Les calculs pour passer du temps à la longitude et *vice-versa,* son ainsi entièrement supprimés, et par suite les erreurs de calcul.

On apprend à calculer facilement en *cés,* en remarquant qu'actuellement nous avons 96 quarts d'heure (24×4); la réforme consiste donc à prendre 100 petits quarts d'heure au lieu de 96 et à calculer par quarts d'heures, ce qui est facile.

En partant des grandes divisions suivantes et en ajoutant ou retranchant un *cé* par quart d'heure, on commet des erreurs négligeables dans la pratique courante:

Minuit, correspond à.............	0	*cés*
6^h matin à.......................	25	»
Midi à..............................	50	»
6^h soir à.........................	75	»
Minuit à...........................	100	»

Donc *midi* et *demi,* vaut 52 *cés;* 7^h soir, 79 *cés,* etc.

Pour avoir plus d'exactitude, il faut prendre pour l'heure sa valeur plus approchée, 4 *cés* et 12 *décicés* ($4^c{,}2$). Ainsi, 7^h matin vaut $25^c + 4^c{,}2 = 29^c{,}2$. Le tiers du jour, ou 8^h matin, vaut $33^c{,}3$, etc.

Le décicé vaut $1^m\,26^s$, ou $1^m\,^1/_2$ environ; c'est l'équivalent de la minute ordinaire. Enfin, pour les calculs plus précis, il faut employer des tables de transformation déjà dréssées, donnant jusqu'à le neuvième décimale. (R. G.).

[1] En absolu, il est faux de dire que les pays aujourd'hui rattachés au système des fuseaux horaires ont substitué à leurs propres méridiens, celui de Greenwich.

En fait, après la réforme, l'heure de chacun de ces Etats reste celle du méridien national, simplement retardée ou avancée d'une petite quantité fixe, calculée une fois pour toutes. (R. G.).

[2] L'établissement du temps décimal au point de vue scientifique, ne présente pas de difficultés sérieuses.

M. de Rey-Pailhade, a déjà fait construire des chronomètres, des montres qui donnent sans confusion les deux manières de compter le temps. Il suffirait d'un congrès international organisé exprès pour faire progresser et peut-être même terminer l'établissement de ce progrès qui s'impose aux hommes du xxe siècle. (R. G).

En résumé, par notre exposé rapide de cette question qui exigerait, pour être traitée complétement, de longs développements, nous croyons avoir démontré qu'ils est impossible d'établir sur toute la terre un temps unique et universel.

Au contraire, en étendant les applications de la numération décimale aux mesures du temps et des angles, on apporte de telles facilités, de tels progrès, qu'il deviendra possible au différentes nations de s'étendre: 1° pour fixer un méridien initial neutre, à l'abri de la compétence des divers gouvernements et respectant la tradition historique de dater le jour de l'orient vers l'occident; 2° pour établir le temps décimal et la graduation concordante des cartes, de manière à pouvoir partager la terre, suivant les convenances géographiques et des nations, en fuseaux séparés entre eux par des multiples pairs de centièmes de jour.

LISTA DOS REPTIS E AMPHIBIOS QUE FAZEM PARTE DA ULTIMA REMESSA DE J. D'ANCHIETA (1897)

POR

J. BETHENCOURT FERREIRA

Depois de fallecido este viajante, ao cabo de mais de 30 annos de incessante exploração no interior d'Africa, proseguida com uma especie de fanatismo zoologico, chegaram ainda á metropole sobejas provas de que o heroico sertanejo continuava, pouco antes da sua morte, a rebuscar com identico fervor scientifico ao dos primeiros annos exemplares com que enriquecer os dominios das sciencias naturaes e especialmente o Museu nacional, que é o vasto repositorio das suas magnificas collecções.

Damos em seguida a lista e algumas observações dos especimens que, por assim dizer, nos legou o venerando explorador, o qual, pelas notas que os acompanhavam, se vê ter sido surprehendido pela morte em plena actividade do seu exercicio.

BATRACHIA

Rana mascareniensis, D. B.

R. mascareniensis, D. B., *Erp. Génér.*, VIII, p. 350; Boulgr., *Cat. Batr. Sal. B. M.*, 1882, p. 52; Bocage, *Herp. d'Angola*, 1895, p. 160; *R. porosissima*, Steind., *Novara Amphib.*, p. 18, pl, I, fig. 9.

Este exemplar pertence á especie denominada *porosissima* por Steindachner e que o sr. prof. Bocage considera como uma variedade

da *R. mascareniensis* e formada á custa d'esta do mesmo modo que a *R. mossambica*, Ptrs.

Deve notar-se que esta é uma das especies que teem uma area geographica mais extensa, e, dada a facilidade que este genero de amphibios tem de variar, ao menos nos seus caracteres exteriores, não admira que se constituisse a *R. porosissima*, á custa de uma variação mais accentuada d'aquella especie, encontrada n'uma localidade distante do seu logar de origem.

Julgamos que se deve ao sr. Barboza du Bocage o conhecimento da existencia em Angola da *R. mascareniensis*, que elle descreveu primeiro como especie nova, com a denominação de *R. Anchietae.*[1] A especie foi encontrada principalmente na Africa oriental por varios auctores que a descreveram de maneira differente, denotando que o *facies* dos diversos individuos que houveram para estudo os impressionára desegualmente, e d'ahi a longa synonymia que existe na taxonomia.

O exame dos exemplares como este enviados do interior de Angola mostra que a variedade *porosissima* habita de preferencia nas regiões elevadas de leste e sul da provincia.

Um exemplar com as côres e desenhos muitos distinctos e originario do Rio Cuce (localidade nova); representa a maior extensão d'esta especie para o sul de Angola (Caconda).

Rappia marmorata (Rapp.)

Hyperolius marmoratus, Rapp., *Arch. f. Naturg.*, 1842, p. 289, tab. 6; Bocage, *Jorn. Sc. Lisboa*, I, 1866, p. 55; *H. huillensis*, Bocage, ibid., IV, 1873, p. 225; VII, 1879; p. 89; *Rappia marmorata*, Boulgr., *Cat. Batr. Sal. Brit. Mus.*, p. 121; Bocage, *Herp. d'Angola*, p. 164.

Dois exemplares d'esta ultima remessa representam respectivamente as variedades *Tæniolata* e *huillensis*, descriptos n'esta ultima monographia. Foram trazidos tambem do Rio Cuce, uma das localidades de latitude mais inferior em que esta especie tem sido encontrada.

Rappia plicifera, Boc.

R. plicifera, Bocage, *Jorn. Sc. Lisboa*, 2.ª ser., III, 1893, p. 119; *Herp. d'Angola*, p. 167.

Juntamente com a especie anteriormente mencionada encontrámos muitos exemplares de differentes sexos e edades, referiveis á *R. plicifera* e representando algumas variedades de côr e desenho, reductiveis aliás ao mesmo typo. A alteração das côres devida ao alcool e a deformação de muitos exemplares difficultam a comparação exacta, de modo a poder estabelecer desembaraçadamente a distincção entre

---

[1] Bocage, *Proc. Soc. Zool. Lond.*, 1867, p. 843.

esta especie e a anterior. Em todo o caso, os ultimos exemplares remettidos por Anchieta levam-nos a confirmar a separação d'esta especie, pela fixidez que mostram dos caracteres indicados na descripção do prof. Bocage, comquanto a *R. plicifera* continue a ser realmente muito proxima da *R. marmorata.*

Não é sem uma tal ou qual systematisação que os desenhos e as côres se mostram n'esta especie. Em regra ha uma mancha irregularmente triangular e mais ou menos escura na região inter-orbitaria. Nas regiões scapular e illiaca existe quasi sempre uma mancha quadrangular da mesma côr violacea, bordada por um delicado traço branco que percorre e aviva as linhas das granulações cutaneas, formando um desenho semelhante ao que se vê na *Hyla arborea.* Encontra-se em todos os exemplares mais ou menos apagada uma dupla mancha, na região coxygia, affectando fórmas diversas, geralmente angulosas. Pelos membros vêem-se varias manchas transversaes acastanhadas ou da mesma côr violacea escura, avivadas de uma tenue linha branca.

Em alguns exemplares notam-se pontos ou manchas pequenas, brancas, leitosas, espalhadas pelo dorso. Como é facil de perceber, esta apparencia de coloração e desenho pode distinguir em pouco demorada observação a *R. plicifera* da especie que lhe fica proxima.

SAURIOS

Holaspis guentheri (Smith.)

Gray, *P. Z. S. L.*, 1863, p. 153, pl. XX, fig. 1; Boulgr., *Cat. Liz. B. M.*, III, p. 118.

É com certeza uma especie rara, pois em tantas remessas feitas pelo nosso sertanejo, não nos tinha ainda chegado ao conhecimento, senão pelas descripções de Gray e de Boulenger (loc. cit.), sendo para notar que este ultimo apenas dá então noticia de um typo unico, sem localidade determinada, marcando como *habitat* parte da Guiné superior (Gabão, Serra Leôa e Congo).

O exemplar mandado por Anchieta na ultima remessa é do Rio Cuce, localidade que denuncia a extensão meridional da area geographica conhecida d'esta especie.

Como se trata de um exemplar raro e notavel por certos pormenores da sua configuração, vamos accrescentar algumas observações nossas para completar a sua descripção.

A temporal que, tanto na descripção de Gray como na de Boulenger, se diz ser coberta de escamas granulares, no nosso exemplar está encimada por uma serie de 4 placas justapostas e de dimensões decrescentes para o lado da orbita. A placa occipital é de cinco lados, em vez de triangular, como foi descripta.

São 16 os poros femuraes em vez de 13 (Boulenger). Emfim este

curioso especimen apresenta um desenho singular, que o torna á primeira vista distincto. As tres linhas brancas ou branco azuladas (Gray) que ornam a cabeça e o tronco, eram n'este exemplar conservado em alcool e antes de exposto á luz, de um azul intenso, principalmente na metade posterior do dorso e na cauda, onde conservam ainda este tom bem visivel, apesar da immersão prolongada no alcool. São além d'isso compostas na sua porção posterior de series de manchas quadrangulares ou ovalares, maiores nas placas dorsaes mais largas e minimas nas dorso-lateraes, obliquamente dispostas no sentido da diagonal da placa.

A cauda incompleta apresenta as escamas caracteristicas do genero, achatadas e levantadas em serrilha, aos lados do orgão. Sobre a côr fundamental negra d'este, observam-se as duas linhas de manchas quadrangulares mais ou menos longas, tanto na parte superior, como na inferior e ostentando uma magnifica côr azul-anilada, mesmo no alcool.[1]

Ichnotropis capensis, Smith.

Algyra capensis, Smith., *Ann. Mag. N. H.*, 1838, II, p. 24; *Ich. capensis,* Boulgr., *Cat. Liz. B. M.*, 1887, III, s. 78; Bocage, *Herp. d'Angola,* p. 30.

Um exemplar adulto proveniente do Rio Cuce.

OPHIDIA

Typhlops anomalus (Boc.)

Onychocephalus anomalus, Bocage, *Jorn. Sc. Lisboa,* IV, 1873, p. 248; *Typhlops anomalus,* Boulgr., *Cat. Liz. B. M.*, 1893, I, p. 47.

A julgar pelas dimensões é um exemplor novo, que o mesmo explorador nos trouxe de Caconda.

Lycophidium semiannulis, Ptrs.

L. semiannulis, Peters, *Reis. n. Moss.*, 1882, III, p. 135, pl. XVI, fig. 2; Boulgr., *Cat. Sn. B. M.*, I, p. 339.

Referimos a esta especie dois exemplares do Rio Cuce, de que não encontramos identicos nas collecções do Museu, e cuja configu-

---

[1] Ao tempo da publicação da *Herpetologia d'Angola* (1895–96) não era entre nós conhecido nenhum exemplar d'esta especie, cuja diagnose, á falta de typo, o sr. prof. Bocage transcreve n'aquella obra. Aproveitamos pois o ensejo, que nos fornece o achado feito por Anchieta, para completar a descripção e a caracteristica da especie e para definir por mais uma localidade o seu *habitat.*

ração se approxima do typo descripto por Peters. Muito proxima do *L. capense,* mais vulgar, é facil de se confundir com este, mas distingue-se bem pela presença de barras negras atravez do corpo, as quaes constituem um caracter constante, segundo se observa nos exemplares examinados.

Boodon lineatus, D. B.

B. lineatus, D. B., *Erp. Génér.*, VII, p. 363; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa,* 1866, p. 49; *Herp. d'Angola*, p. 78; Boulgr., *Cat. Sn. B. M.*, I, p. 332.

Exemplar proveniente de Caconda.

Philothamnus semivariegatus (Smith.)

Dendrophis (Philothamnus) semivariegata, Smith., *Ill. Afr. Zool. Rept.*, pl. LIX, LX, LXIV, 1840; *Ahaetula semivariegata*, Günth., *Ann. Mag. N. H.*, 1869, XI, p. 285; *Philothamnus Smithii,* Bocage, *Jorn. Sc. Lisboa,* 1882, p. 17, fig. 5; *Ph. semivariegata,* Boulgr., *Cat. Sn. B. M.*, II, p. 99; Bocage, *Herp. d'Angola,* p. 90, pl. XIII, fig. 2 (*a—c*).

Dois exemplares do Rio Cuce, proximo de Caconda, ambos de uma côr azulada, tirando para olivacea no dorso, esbranquiçada ou levemente esverdeada ou amarellada no ventre.

Philothamnus dorsalis (Boc.)

Leptophis dorsalis, Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa,* 1866, I, pp. 48-49; *Ph. dorsalis,* Peters, *Mon. Ak. Berl.*, 1877, p. 620; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa,* 1882, IX, p. 3, fig. 3; *Herp. d'Angola,* p. 92, pl. XIII, fig. 1 (*a-c*).

A localidade em que foi encontrado este exemplar indica que o habitat d'esta especie é extensivo para sueste (Caconda).

Rhagerhis tritaeniata, Gthr.

R. tritaeniata, Gthr., *Ann. Mag. N. H.*, 1868, I, p. 423, pl. XIX, fig. *H*; Bocage, *Jorn. Sc. Lisboa,* IV, 1870; *Herp. d'Angola,* p. 110.

D'esta especie temos a mencionar mais um exemplar incompletamente adulto, oriundo de Caconda.

Dispholidus (Bucephalus) typus (Smith.)

B. typus, Smith., *Zool. Jorn.*, 1829, IV, p. 441; *B. capensis*, Smith , *Ill. Zool. Soc. Afr.*, III, *Rept.*, pls. X-XIII; Bocage, *Jorn. Sc. Lisboa,* 1873, IV, p. 282; *Herp. d'Angola,* p. 121; *Dispholidus typus,* Boulg., *Cat. Sn. B. M.*, 1896, III, *p.* 197, fig. 14.

Dois exemplares d'esta ultima remessa representam as duas variedades conhecidas; a negra com manchas amarellas figurada por Jan na sua *Iconographie,* e que é das mais vulgares (*B. Belli,* Smith., fide Boulgr.) e uma outra assignalada pelo sr. B. du Bocage, menos vul-

gar, a mais rara de todas as variedades d'esta especie e que apresenta uma côr uniforme de barro cozido, mais accentuada nas regiões superiores. É de uma localidade mais do sueste de Angola, proximo de Caconda.

Segundo a descripção do sr. Boulenger esta ultima variedade é a que se refere ao *B. typus,* de Smith.; comtudo o exemplar enviado por Anchieta não tem mancha nenhuma, attributo que parece exclusivo dos novos d'esta variedade.

O *habitat* d'esta especie é muito mais extenso do que os numerosos exemplares colleccionados no Museu de Lisboa podem fazer julgar, sendo realmente das cobras mais frequentes de encontrar em todo o continente africano. De novo aproveitamos a occasião para assignalar que esta especie, de tão larga dispersão geographica, é uma das mais sujeitas á variação, devendo tambem notar-se que os limites d'esta são dos mais afastados, principalmente no modo de coloração, que diverge desde a côr de tijolo, mais ou menos carregada, até ao pardo olivaceo, e d'este tom até ao verde claro, com manchas negras, sendo muito distincta a variedade negra com pontos amarellos ou esverdeados (*B. Belli,* Smith.) e a preta uniforme, acinzentada nas regiões inferiores, que parece ser propria da Africa oriental.

Causus rhombeatus (Licht.)

Sepedon rhombeatus, Lichtenstein, *Verz. Doubll. Mus. Berl.*, 1823, p. 106; *Causus rhombeatus*, *Wagl. Natür. Syst. Amph.*, 1830, p. 172; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, 1879, VII, p. 96; *Herp. d'Angola*, p. 145; Boulgr., *Cat. Sn. B. M.*, III, p. 467.

Rio Cuce.

Bitis arietans, Bocage.

Bocage, *Jorn. Sc. Lisboa,* XI, pp. 190 e 197; *Herp. d'Angola,* p. 149.

D'esta especie mandou Anchieta mais tres exemplares dos quaes um, pelo mau estado de conservação, não permitte fazer um estudo completo, por isso que vinha tinto de negro, que apenas destingiu em parte em successivas lavagens, mas que nos parece não differir sensivelmente do typo definido pelos zoologistas.

Bitis heraldica (Boc.)

Bitis peringueyi, Boulgr., *Ann. Mag. N. H.*, 1888, II, p. 141; *Vipera heraldica*, Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa,* 1889, I, p. 127; *Herp. d'Angola,* p. 151, pl. XVI, fig. 1.

Veiu tambem na mesma remessa um exemplar da vibora descripta pelo sr. prof. Bocage e que o sr. Boulenger faz synonyma da especie por este descripta precedentemente sobre um exemplar vindo de Damaraland.

N'este exemplar nota-se um pormenor que nem na descripção do sr. Boulenger nem na do prof. Bocage encontrámos assignalado, e que

consiste n'uma acuminação entre as orbitas, de modo que as escamas lanceoladas que revestem esta parte dão um aspecto ouriçado, que modifica muito o *facies* especifico.

Esta saliencia nota-se tambem, posto que em menor grau, em dois exemplares da collecção africana do Museu de Lisboa e parece-nos digno de menção este caracter, porque modifica de tal modo a conformação cephalica d'esta especie que a distingue bem, só por elle, das outras viboras. Não deixa de ter importancia este caracter, a verificar-se com uma certa constancia, porque os outros caracteres são muito diversificaveis e podem de algum modo prestar-se a confusões, antes de mais detida observação e, ao passo que as outras viboras apresentam o espaço inter-orbitario largo e plano, n'esta especie a mesma região é relativamente estreita e levantada, o que dá á escamagem da cabeça uma disposição especial. Nos exemplares por nós observados as duas ordens lateraes extremas de escamas não são providas de saliencia ou carena.

Por outro lado as manchas posteriores da cabeça são mais longas e bem desenhadas n'este exemplar do que n'outros, parecendo-nos portanto que a especie descripta pelo sr. Barboza du Bocage poderá ser considerada como distincta da que foi descripta pelo sr. Boulenger e que segundo este auctor é *ás vezes* affecta d'aquellas manchas occipitaes,[1] em seguimento ao desenho flordelisado, ou do feitio de lança antiga, ou de tridente, que é realmente o principal caracteristico exterior d'esta fórma, o qual se encontra bem nitidamente em outros exemplares da mesma collecção e mais affirma em nós a crença na existencia de uma especie a que podemos, como é de justiça, conservar e nome de *heraldica* proposto pelo zoologo portuguez.

Pelas noticias colhidas não ha certeza de que esta vibora exceda na sua dispersão as regiões de Angola e territorios ao sul d'esta provincia.

O ultimo exemplar recebido de Anchieta é de Caconda.

[1] *Cat. Sn. B. M.*, III, p. 495. Este caracter foi verificado sobretudo em presença da descripção e desenhos da *V. heraldica*, Boc., não existindo, ao que parece, no exemplar estudado pelo sr. Boulenger, que não o menciona na descripção primitiva da especie.

SOBRE UM CARACTER IMPORTANTE PARA A DETERMINAÇÃO DOS GENEROS E ESPECIES DOS «MICROCHIROPTEROS» E LISTA DAS ESPECIES D'ESTE GRUPO EXISTENTES NAS COLLECÇÕES DO MUSEU NACIONAL

POR

A. F. DE SEABRA

N'uma noticia já publicada n'este jornal, tivemos occasião de notar a importancia que existe nos caracteres extrahidos da fórma, disposição e numero das pregas do paladar para a determinação dos generos do grupo *Pteropi,* e julgamos mesmo que estes caracteres merecem a maior attenção para distinguir as differentes especies do referido grupo além das já observadas nos dois generos *Epomophoros* e *Cynonycteris*.

Proseguindo as mesmas observações nas especies da sub-ordem *Microchiroptera,* mais vantajosamente representada nas collecções do Museu de Lisboa que a precedente, verificamos que existe n'estes caracteres identico interesse para a determinação dos seus generos e especies, o que esperamos provar com as notas inscriptas á medida que formos mencionando as differentes especies que podémos estudar.

A collecção dos microchiropteros do Museu, compõe-se de cerca de cem especies, repartidas por vinte e um generos e representadas por perto de quinhentos individuos.

Perdominam n'esta collecção as especies africanas, provenientes ainda das magistraes explorações do mallogrado naturalista José de Anchieta, outras, de identicos trabalhos de Francisco Newton e das apreciaveis dadivas dos ex.mos srs. H. Capello, Bayão, Sá Nogueira, Serpa Pinto, Cardoso, Silverio, Ferreira de Andrade e particularmente de Almada Negreiros.

Sub-ord. MICROCHIROPTERA

Fam. RHINOLOPHIDÆ

Sub-Fam. RHINOLOPHINÆ

Gen. RHINOLOPHUS

Das observações feitas em cinco especies representadas por mais de trinta individuos, concluimos que no genero *Rhinolophus* a esculptura do paladar é caracterisada por 6 ou 7 pregas subdivididas e arqueadas, com excepção das ultimas em geral rectilineas e incompletas. As distancias que as separam entre si, diminuem á proporção que estas se approximam da região posterior.

As pregas assim dispostas duas a duas, são algumas vezes denticuladas e os primeiros pares sempre notavelmente mais proeminentes que os seguintes.

1. Rhinolophus affinis, Horsf.

Rh. affinis, Horsfield; (Dobson, *Cat. Chir. Brit. Mus.*, p. 112, plat. VII, fig. 5).—Temminck, *Monogr. des Mamm.,* II, p. 31;—segundo Dobson, l. c.: «*Rh. rubidus* e *cinerascens,* Kelaart; *Rh. rouscii,* Temm.»

a. ♂ ad. India portugueza, 1883. Junta de saude; (alc. coll. ger.).
b. ♂ ad. Java, 1883. Dr. Toussaint; (pr. a secc. coll. ger.).

Descripção do paladar:—N'esta especie contam-se sete pregas sendo as cinco primeiras arqueadas e subdivididas como representa o schema 1; a 6.ª incompleta e a 7.ª rectilinea e parallela á que serve de limite a esta parte rugosa do paladar. Na sua posição relativa aos dentes, a 1.ª encontra-se junto dos caninos pela parte anterior; a 2.ª na direcção do primeiro premolar; 3.ª junto ao segundo premolar; 4.ª a meio da base do primeiro molar; 5.ª entre o primeiro e segundo molar; 6.ª, rectilinea e incompleta; 7.ª, rectilinea e terminando approximadamente ao meio da base do segundo molar; (segundo observações feitas nos exemplares citados *a* e *b*). N'um d'estes exemplares parece destacar-se ainda uma 8.ª prega, mas a illusão é apenas devida a um pequeno sulco existente na região posterior do paladar.


Schem. 1

2. **Rhinolophus minor**, Horsf.

Rh. minor, Horsfield; (Dobson, *Cat. Chir. Brit. Mus.*, p. 114).—Temminck, *Monogr. des Mamm.*, p. 35.—*Rh. cornutus*, Temm., l. c., p. 37—segundo Dobson, l. c.: «*Rh. borneensis*, Peters».

a. ♂ ad. Timor, 1864. Sr. Frank.; (pr. a secc. coll. ger.).
(Devido ao systema de conservação usado para este exemplar, torna-se impossivel quaesquer observações sobre os caracteres extrahidos do paladar).

3. **Rhinolophus euryale**, Blas.

Rh. euriale, Blasius; (Dobson, l. c., p. 116).

a, b. ♂♂ adultos, Condeixa, 1882. Dr. Mattozo dos Santos; (alc. coll. de Port.).
c. ♂ ad. Algeria, 1882. Dr. Dobson; (alc. coll. ger.).

Descripção do paladar:—Observam-se 6 pregas subdivididas e arqueadas (schema 2). A sua posição relativa aos dentes é a seguinte: a 1.ª terminando ao meio da base dos caninos; 2.ª, terminando proximo do segundo premolar; 3.ª, entre o segundo premolar e o primeiro molar; 4.ª, pela parte posterior do primeiro molar; 5.ª, pela parte anterior do segundo molar; 6.ª, pouco arqueada e incompleta; (segundo as observações feitas nos individuos *a* e *b*). No individuo *c* nota-se um pequeno sulco na região posterior do paladar que parece encaminhar-se para a formação de uma 7.ª prega, mas esta não é ainda mais do que apparente.


Schem. 2

4. **Rhinolophus hipposideros**, Blas.

Rh. hipposideros, Blasius; (Dobson, *Cat. Chir. Brit. Mus.*, p. 117).—*Rh. pusillus*, Temm., l. c., II, p. 35—segundo Dobson, l. c.: «*Rh. bihastatus*, Geoffr.; *Rh. minimus*, Heuglin; *Vespertilio hippocrepis*, Hermann».

a. ♀ ad. Coimbra. Sr. Rosa; (pr. a secc. coll. de Port.).
b, c, d, e, f. 3 ♀ adultas, 1 ♂ juv. e 1 ♂ ad. Serra do Caramulo. Sr. Lima e Lemos; (alc. coll. de Port.).
g. ♂ s. ad. Lisboa, 1867; (alc. coll. de Port.).
h. ♀ ad. Turingen, 1880. Sr. Rey; (dep. pelle).
i. ♀ s. ad. Alfeite, 1888. Sr. J. A. de Sousa; (alc. coll. de Port.).
j, k, l. 3 ♀ adultas, arredores de Marselha, 1889. S. M. El-Rei; (alc. coll. ger.).
k. ♂, Pavia. Dr. Senna; (alc. coll. ger.).

Descripção do paladar:—7 pregas subdivididas; as 2 primeiras notavelmelmente distanciadas, proeminentes e arqueadas. As 5 restantes quasi parallelas entre si, pouco arqueadas em particular as ultimas

que são denticuladas. Quanto á sua posição relativa aos dentes é a seguinte (schema 3): 1.ª terminando ao meio da base do canino; 2.ª, pela parte anterior do segundo premolar; 3.ª, entre o segundo premolar e primeiro molar; 4.ª, meio da base do primeiro molar; 5.ª, parte posterior do primeiro molar; 6.ª, meio da base do segundo molar; 7.ª, separada apenas por um pequeno sulco da 6.ª (segundo observações feitas nos individuos *b* a *g* e *i* a *k*).


Schem. 3

5. **Rhinolophus angolensis**, n. sp.

a. ♀ ad. Hanha, Angola, 1895. Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).

Os caracteres que revestem este exemplar afastam-n'o das especies, *euryale* de Blasius; *Blassi,* Peters; *hipposiderus,* Blasius; *landeri,* Martin; *ferum-equinum,* Leach; *clivosus,* Ruppell; *capensis,* Lichtenstein e *æthiops,* Peters, particulares tambem á fauna do continente africano.

As orelhas são largas, pouco mais curtas que a cabeça, tendo a ponta notavelmente recurvada para fóra, o bordo interno lanoso; antitragus bem desenvolvido; lobo central do appendice nasal *bifurcado* como no *Rh. Blasii,* Peters; a base d'este appendice cutaneo, recobrindo completamente a extremidade do focinho; tres cavidades lateraes, ficando a ultima quasi encoberta pela grande membrana discoidal da base.

Côr geral de um cinzento claro, apenas mais escuro sobre o dorso; membranas pretas, as branchiaes nuas; pela parte inferior, no espaço comprehendido entre o humero e femero estende-se uma leve camada de pellos alvadios.

Dimensões: cabeça e corpo 40 mill.; cauda 27; orelha 13; antebraço 42; pollegar 8; 3.º dedo 67; 5.º dedo 55; tibia 18.

Dentição: como no *Rh. hipposiderus,* Blas. O paladar bastante deteriorado não permitte qualquer exame proveitoso.

6. **Rhinolophus clivosus**, Rupp.

Rh. clivosus, Ruppell; (Dobson, l. c., p. 120).

a. ♂ ad. Africa sept. Verreaux; (pr. a secc. coll. ger.).
b. ♀. Algeria. Verreaux; (pr. a secc. coll. ger.).

Possue o Museu apenas estes dois individuos sobre os quaes se torna impossivel, devido á fórma como se acham preparados, quaesquer observações sobre o caracter particular de que temos tratado.

7. **Rhinolophus æthiops**, Peters.

Rh. æthiops, Peters; (Dobson, l. c., p. 122).—B. du Bocage, *Jorn. Sc. Math. Phys. Nat.*, 2.ª ser., 1889, p. 15.

a. ♂ ad. Maconjo, Mossamedes. 1870. Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).

b. ♂ ad. Quindumbo, Angola. 1887. Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
c. ♀ ad. Quissange, Angola. 1890. Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
d. ♀ ad. Quissange, Angola. 1890. Anchieta; (alc. dep.).
e. ♀ ad. Quibula, Angola. 1891. Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
f. ♀ ad. Quissange, Angola. 1891. Anchieta; (alc. dep.)
g. ♀ ad. Cahata, Angola. 1892. Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
h. i. ♀♀ adultas. Cahata, Angola. 1892. Anchieta; (alc. dep.).
j, k, l, m. ♂♂, ♀♀. Quissange, Angola, 1895. Auchieta; (alc, dep.).

Descripção do paladar: — As pregas do paladar acham-se quasi dissimuladas n'esta especie. Comtudo os seus vestigios concordam inteiramente com os caracteres propostos para a determinação do genero. São em numero de 6 subdivididas e mais ou menos arqueadas como se tem observado nas especies precedentes. Em relação aos dentes acham-se dispostas: a 1.ª (schema 4), pela parte anterior do canino; 2.ª, na direcção do segundo premolar; 3.ª, parte anterior do primeiro molar; 4.ª, meio da base do primeiro molar; 5.ª, entre o primeiro e o segundo molar; 6.ª, parte anterior do segundo molar (raras vezes incompleta); (segundo as observações feitas nos individuos *a* a *g*).


Schem. 4

Nos differentes individuos que representam esta especie nas collecções do Museu observámos que os appendices cutaneos nasaes são em geral muito mais desenvolvidos nos individuos machos que nas femeas. Alguns outros (*h* a *m*) tornam-se notaveis pelo desenvolvimento consideravel das orelhas e ao mesmo tempo pela nitidez com que as pregas do paladar se distinguem, caracteres estes que poderiam talvez servir para a formação de uma variedade.

8. **Rhinolophus ferrum-equinum**, Leach.

Rh. ferrum equinum, Leach; (Dobson, l. c., p. 119).— *Rh. nippon*, Temm., l. c., II, p. 30 — segundo Dobson, l. c.: «*Rh. unihastatus*, Geoffr.; *Rh. Geoffroyi*, Smith.; *Rh. tragatus*, Hodg.; *Rh. fumigatus*, Rüpp.; *Rh. Deckenii*, Peters; *Vespertilio ferrum-equinum*, Sch.»

a. ♂ ad. Algeria, 1860. Fairmaire (alc. coll. ger.).
b. ♂ ad. Coimbra, 1869. Sr. Rosa; (alc. coll. de Port.).
c, d, e. 1 ♂ e 2 ♀. Turim, 1878. Museu de Turim; (alc. coll. ger.).
f. ♂ ad. Alfeite, 1886. Sr. A. de Sousa; (alc. coll. de Port.).
g. ♀ ad. Ajuda. Sr. Sousa; (alc. coll. de Port.).
h. ♂ ad. Mattozinhos. Sr. J. Newton; (alc. coll. de Port.).

Descripção do paladar: (schema 5) — Muito semelhante ao que se observa no *Rh. euryale*, Blas. Contam-se egualmente 6 pregas sendo as primeiras mais angulosas que curvilineas. Na sua posição relativa com os dentes, a 1.ª encontra-se proximo do meio da base do canino; 2.ª meio da base do segundo premolar; 3.ª, parte anterior do primeiro molar; 4.ª, parte posterior do primeiro molar; 5.ª, parte anterior do segundo molar; 6.ª incompleta.


Schem. 5

Correspondem a estes caracteres os individuos *b, f, g, h*. Os tres exemplares *c* a *e* de Turim e o de Algeria, *a*, existentes nas collecções do Museu, differem dos primeiros a que nos referimos pela côr do pello de um branco amarellado ou arruivado e pela fórma das pregas do paladar que tomam o aspecto de uma serie de placas sobrepostas e denticuladas.

Sub-Fam. PHYLLORHININÆ

Gen. TRIÆNOPS

Devido ao estado bastante damnificado em que se encontram as duas unicas especies que representam este genero nas nossas collecções, torna-se-nos impossivel registar qualquer nota referente aos caracteres extrahidos das pregas do paladar como até aqui temos feito.

9. **Triænops persicus**, Dobson.

Tr. persicus, Dobson, *Cat. Chir. Brit. Mus.*, p. 124; (*Journ. Asiat. Soc. Beng.*, xi, p, 455, etc.)

a. ○? Africa oriental? 1882. Deyrolle; (pelle dep.).

10. **Triænops afer**, Peters.

Tr. afer, Peters; (Dobson, l. c., p. 125).

a. ○? Africa oriental? (pelle dep.).

Gen. PHYLLORHINA

Segundo as sete especies que podémos observar, representadas por trinta e cinco individuos, concluimos que n'este genero a esculptura do paladar é caracterisada por 7 ou 8 pregas, rarissimas vezes 6, *não subdivididas;* as duas ou tres primeiras, algumas vezes angulosas em /\ ou esquadradas ⌐¬; as restantes mais ou menos rectilineas e parallelas. Com excepção das duas ou tres primeiras, são separadas entre si apenas por um pequeno sulco.

11. **Phyllorhina commersonii**, Peters.

Ph. commersonii, Peters; (Dobson, l. c., p. 133); *Ph. vitata*, Temm., *Esquiss. zool. sur la côte de Guiné*, p. 72; — segundo Dobson: «*Rhinolophus commersonnii*, Geoffr.; *Rh. gigas*, Wagner; *Macronycteris gigas*, Gray.»

a. ♂, Angola, 1863. Sr. A. C. de Carvalho; (pr. a secc. coll. d'Afr.).
b, c. ♂ e ♀, Angola, 1866. Toulson e Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).

d. ♂, Angola, 1866. Toulson e Anchieta; (alc. dep.).
e. ♂, Catumbella, 1869, Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
f. ♀, Bissau, 1869. Sr. Sá Nogueira; (alc. coll. ger.).
g. ♀, Humbe, Angola, 1874. Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
h. ♀, Humbe, Angola, 1878. Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
i. Esqueleto, Angola. Anchieta.

Observando os paladares d'estes individuos, encontramo-nos em presença de dois typos distinctos comquanto pertencentes naturalmente á mesma especie. As differenças que vamos registar são ainda auxiliadas pelas dimensões e côr da pelagem dos dois grupos assim formados pelos exemplares (*b* a *e*) e (*f* a *h*).

Esta *Phyllorhina* foi descripta pela primeira vez por Geoffroy sob a rubrica de *Rhinolophus commersonii,* nos annaes do Museu de Paris, xx, p. 263, pl. V, 1813 (segundo uma indicação de Guibel e Dobson), mas, infelizmente, falta nos este volume o que nos impossibilita de reconhecer, entre os nossos exemplares, qual o typo particular da especie. Deixamos pois ás investigações d'outrem que possa verificar com o auxilio de outros exemplares e das notas que abaixo inscrevemos, qual o verdadeiro typo da especie.

Descripção dos paladares: — O paladar (schema 6) apresenta-se constituido por pregas simples; as ultimas egualmente distanciadas entre si, parallelas e um pouco arqueadas como as primeiras. Dos 7 individuos classificados como pertencentes a esta especie, 3, (*f, g, h*) apresentam 7 pregas com a disposição seguinte: 1.ª, meio da base do canino; 2.ª, entre o canino e 2.º premolar; 3.ª, meio da base do grande premolar; 4.ª, parte anterior do primeiro molar; 5.ª, parte posterior do primeiro molar; 6.ª, entre o primeiro e segundo molar; 7.ª, incompleta e subdividida; a linha da base affectando uma leve curva em sentido opposto ás pregas.



Schem. 6

Nos exemplares (*b, c, d, e*) existem apenas 6 pregas menos arqueadas (schema 7), especialmente a partir da terceira e dispostas nas seguintes posições relativas aos dentes: 1.ª, meio da base do canino; 2.ª, parte posterior do canino; 3.ª, meio da base do grande premolar; 4.ª, parte anterior do primeiro molar; 5.ª, parte posterior d'este dente; 6.ª, arqueada, proximo da parte anterior do segundo molar: a linha da base rectilinea.



Schem. 7

Nota-se além do que fica registado que os exemplares do primeiro grupo não atingem nunca as dimensões que se observam nos do segundo, como se pode vêr no seguinte mappa.

	♂ b	♀ c	♂ d	♂ e	♀ f	♀ g	♂ h
Cabeça e corpo	110mm	110mm	118mm	122mm	97mm	97mm	80mm
Cauda	35	23	23	33	30	30	26
Cabeça	38	38	40	42	37	36	35
Orelha	28	28	30	28	27	27	25
Membrana discoidal dos app. nasaes	12	12	13	13	12	11	11
Ante-braço	110	110	110	112	94	95	95
Pollegar	13	13	15	15	13	12	12
3.º dedo metacarpo	70	68	77	79	62	65	65
3.º dedo 1.ª phalange	34	34	37	37	30	30	30
3.º dedo 2.ª phalange	45	45	47	48	40	40	40
4.º dedo metacarpo	68	66	70	76	61	64	63
4.º dedo 1.ª phalange	27	25	28	27	25	25	24
4.º dedo 2.ª phalange	17	18	17	17	16	16	15
5.º dedo metacarpo	64	64	69	75	63	63	63
5.º dedo 1.ª phalange	27	25	29	28	25	24	24
5.º dedo 2.ª phalange	18	19	18	19	17	16	16
Tibia	43	42	41	45	40	37	37
Pé	22	22	22	23	20	22	22

Notamos ainda que os exemplares do grupo (*b, c, d, e*) são consideravelmente mais claros que os do grupo (*f, g, h*) e de um pardo acinzentado, ao passo que nos primeiros esta côr approxima-se mais da sepia queimada ou côr de castanha.

12. **Phyllorhina commersoni**, Peters, var. **thomensis**, Bocage.

Ph. commersoni, var. *thomensis*, Bocage, *Jorn. Sc. Math. Phys. Nat.*, 2.ª ser., t. II, p. 88; 1890.

a. ♂, S. Thomé, Ribeira do Peixe, 1890. Fr. Newton; (alc. coll. d'Afr.).
b. ♀, S. Thomé, Saudade, 1885. Fr. Newton; (alc. coll. d'Afr.).
c. ♀, S. Thomé, 1898. Sr. Almada Negreiros; (alc. coll. d'Afr.).

Descripção do paladar: — Analogo ao da especie representada pelos exemplares *f, g, h*. Notamos comtudo e especialmente nos individuos femeas que a esculptura formada pelas pregas é indecisa e intercortada por sulcos irregulares e transversaes.

13. **Phyllorhina diadema**, Peters.

Ph. diadema, Peters; (Dobson, l. c., p. 137). Syn. segundo Dobson, l. c.: «*Rhinolophos diadema*, Geoffr.; *Rh. nobilis*, Horsf.; *Rh. griseus*, Meyen.; *Rh. diadema* e *nobilis*, Temm.; *Hipposideras nobilis*, Cantor; *Hipp. lankadiva*, Kelaart.

a, b. ♂ e ♀, Timor, 1882. Sr. F. Bernardino de Carvalho; (pelle dep.).

14. **Phyllorhina fuliginosa**, Temm.

Rh. fuliginosus, Temminck, *Esquiss. zool. sur la côte de Guiné*, p. 77; Dobson, l. c., p. 139; Bocage. *Jorn. Sc. Math. Phys. Nat.*, 2.ª ser., III, pp. 197–198; 1889.

a, b. ♂ ad. S. Thomé, Batepá, 1889. F. Newton; (alc. col. d'Afr.).
c. ♀, ad. S. Thomé, Ribeira do Peixe, 1890. F. Newton; (alc. coll. d'Afr.).
d. ♂ ad. Liberia. Dr. Senna Pavia; (alc. coll. ger.).
e. ♂, S. Thomé, 1894. F. Newton; (pr. a secc. col. d'Afr.).
f. o? S. Thomé, Roça Nova Java. F. Newton; (pr. a secc. coll. d'Afr.).
g. ♂, Bossité, Fernando Pó, 1895. F. Newton; (alc. coll. d'Afr.).
h, i. ♂ e ♀, Principe, Praia Calabar, 1894. F. Newton; (alc. coll. d'Afr.).
j. ♀ ad. S. Thomé, 1896. Sr. Almada Negreiros; (alc. coll. d'Afr.).
k. ♂ ad. S. Thomé, 1899; (Roça Saudade). Sr. Almada Negreiros; (alc. coll. d'Afr.).
l, m. oo? S. Thomé, Roça Condessa (100^{m} de alt. a N. E. da cidade, 1898. Sr. Almada Negreiros; (pell. dep.).
n, o, p. ooo? S. Thomé, 1898. Sr. Almada Negreiros; (dep. pell.). Conservamos alguma reserva sobre a determinação d'estes ultimos exemplares (*n, o, p*).
p. ♀, S. Thomé, Roça Quija, 1899. Sr. Almada Negreiros; (alc. dep.).
q. Craneo, Africa occidental. Jung. River; (coll. d'Afr.).

Descripção do paladar: (schema 8) — Oito pregas; as 3 primeiras curvilineas; as 5 restantes quasi rectas e parallelas entre si. Posição relativa aos dentes: 1.ª, parte anterior do canino; 2.ª, meio da base do grande premolar; 3.ª, entre o premolar e o primeiro molar; 4.ª, parte anterior do primeiro molar; 5.ª, parte posterior d'este dente; 6.ª, entre o primeiro e segundo molar; 7.ª, parte anterior do segundo molar; 8.ª, parte posterior ou meio da base do segundo molar; a linha da base parallela ás ultimas pregas. As primeiras pregas são entrecortadas ao meio por um pequeno sulco que não chega mesmo a dividil-as. (Caracteres concordando com todos os exemplares conservados em alcool existentes nas collecções do Museu).


Schem. 8

15. **Phylorhina caffra**, Temm.

Ph. caffra, Temminck, *Esquiss. zool. sur la côte de Guiné;* (Dobson, l. c., p. 140): «*Rh. caffer,* Sundevall; *Ph. gracilis* e *caffra*, Peters; *Ph. bicornis*, Henglin.»

a, b. ♂ e ♀, Bissau, 1870. Sr. Sá Nogueira; (alc. coll. d'Afr.).
c. ♀, Ibo, 1886. Srs. Serpa Pinto e Cardoso; (alc. coll. d'Afr.).

Descripção do paladar: (schema 9) — Oito pregas, sendo duas arqueadas e seis quasi rectilineas e parallelas entre si. Na sua posição relativa aos dentes encontram-se: 1.ª, meio do base do canino; 2.ª, parte anterior ao grande premolar; 3.ª, parte posterior d'este dente; 4.ª, parte anterior do primeiro molar; 5.ª, meio da base do primeiro molar; 6.ª, entre o primeiro e segundo molares; 7.ª, parte anterior do segundo molar; 8.ª, incompleta; a linha da base formando uma ligeira curva opposta á das pregas (segundo as observações feitas nos tres exemplares citados).


Schem 9

16. **Phyllorhina angolensis**, Bocage.

Ph. angolensis, Bocage, *Jorn. de Sc. Math. Phys. Nat.*, 2.ª ser., n.º XVI, 1897, p. 185; *Ph. caffra,* Bocage, l. c., 2.ª ser., I, 1889, p. 4 e 16.

a, b. ♂ e ♀ ad., Benguella (Angola). Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
c. o? Zaire, 1863. Sr. H. Capello; (pr. a secc. coll. d'Afr.).
d, e. ♂ e ♀ ad., Benguella (Angola), 1886. Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
f. ♂, Catumbella (Angola). Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
g. ♂, Rio Coroca (Angola). Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
h. ♀ ad. Capangombo (Angola). Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
i. ♂, Gambo (Angola). Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).
j. ♂, Hanha (Angola), 1895. Anchieta; alc. coll. d'Afr.).
k, l, m. ♂ e ♀♀, Hanha (Angola). Anchieta; (alc. coll. d'Afr.).

Conservamos alguma reserva sobre a determinação dos ultimos individuos *k, l, m,* que differem consideravelmente dos precedentes pela sua côr pardo-avermelhado. Talvez esta variação seja apenas devida ao facto de terem sido enviados para o Museu n'um alcool contendo em abundancia acido phenico.

Descripção do paladar: (schema 10) — Distingue-se facilmente o paladar d'esta especie do paladar da *Caffra* pela fórma angulosa das duas primeiras pregas. 1.ª, termina pela parte posterior do canino, rodeando um pouco a base interna d'este dente; 2.ª, termina pela parte posterior do grande premolar; 3.ª, analoga a este ultimo, entre o premolar e primeiro molar; 4.ª, parte anterior do primeiro molar; 5.ª, parte posterior do primeiro molar; 6.ª, entre este dente e o segundo molar; 7.ª, meio da base do segundo molar; 8.ª, incompleta;


Schem. 10

a linha da base levemente recurvada em sentido opposto ás pregas. A 4.ª prega acha-se mal representada no schema; em vez de ser parallela ás seguintes como succede nas especies até aqui observadas, conserva uma fórma intermedia entre as tres primeiras, angulosas, e as seguintee quasi rectilineas (segundo as observações feitas sobre todos os exemplares citados que se acham conservados em alcool).

17. **Phyllorhina speoris**, Peters.

Ph. speoris, Peters (Dobson, l. c, p. 143) — segundo Dobson, l. c.: «*Rh. speoris*, var. *taitiensis*, Zelebor, *Vespertilio speoris*, Schr.; *Rhinolophus dukhunensis*, Sykes; *Rh. speoris*, Elliot; *Hipposideros apiculatus* e *penicillatos*, Gray; *Hipp. speoris*, Blyth; *Hipp. speoris* e *sempletonii*, Kelaart.

a. ♂? India, 1882. Museu de Paris; (dep. pell.).

18. **Phyllorhina fulva**, Peter.

(var.) *Rh. fluva*, Peters (Dobson, l. c., p. 149) — segundo Dobson, l. c.: «*Ph. aurita*, Tomes; *Hipposideros fulva* e *morinus*, Gray; *Hipp. fulvus*, *marinus* e *atratus*, Kelaart; *Hipp. cineraceus*, Blyth; *Rhinolophus murinos* e *fulvus*, Elliot; *Chrysonicteris fulva*, Gray.»

a. ♂ ad. Pegu, 1889. Museu Britannico; (alc. coll. ger.).

Descripção do paladar: (schema 11) — Observam-se apenas 7 pregas no paladar d'esta especie: 1.ª, esquadrada, parece unir por uma recta os dois caninos; 2.ª, angulosa, termina pela parte posterior do grande premolar; 3.ª, quasi rectilinea, pela parte anterior do primeiro molar; as seguintes rectilineas e terminando segundo a mesma ordem: 4.ª, meio da base do primeiro molar; 5.ª, entre o primeiro e segundo molar; 6.ª, parte anterior d'este dente; 7.ª, incompleta; linha da base parallela ás ultimas pregas (segundo a observação feita sobre o individuo citado, *a*).


Schem. 11

Dobson considera a *Rh. fulva*, Peters, como uma variedade da *Rh. bicolor*. Lamentamos não poder observar os caracteres offerecidos pelo paladar d'esta especie.

Uma outra especie considerada ainda por Dobson como variedade da *Ph. bicolor* é a *Ph. ambayonensis*, Peters. O unico exemplar que representa esta especie nas collecções do Museu, por estar bastante deteriorado não nos pode servir para continuar as observações que até aqui temos ligado á maior parte das especies mencionadas; comtudo parece-nos que ha uma alteração nas ultimas pregas que, em logar de se apresentarem rectilineas são mais ou menos angulosas.

19. **Phyllorhina amboinensis**, Peters.

(var.) *Ph. amboinensis*, Peters (Dobson, l. c., p. 150).

a. ♂ ad. India, 1882 (Dobson); alc. coll. ger.).

Gen. ANTHOPS

20. Anthops ornatus, Thom.

Anthops ornatus, Thomas, *Ann. N. H.*, I, 1888, p. 156, Solomon Is.

a. ♀ ad. Hola — Guadalcanos, 1889. Mus. Brit.; (alc. coll. ger.).

Um magnifico exemplar d'esta novo genero e especie do professor Thomas, foi-nos offerecido junto com alguns outros chiropteros em 1889. Observando o paladar conseguimos egualmente destacar esta especie das incluidas no genero *Phyllorhina* apesar da grande analogia que existe entre ellas. Contamos 6 pregas, sendo as tres primeiras arqueadas e simples, isto é, não subdivididas, e as tres restantes subdivididas ao meio e quasi rectas e parallelas e entre si (schema 12). Na sua posição relativa aos dentes encontram-se: a 1.ª, parte posterior do canino; 2.ª, meio da base do grande premolar; 3.ª, entre este dente e o primeiro molar; 4.ª, meio da base do primeiro molar; 5.ª, parte posterior d'este dente; 6.ª, entre o primeiro e segundo molar; a linha da base rectilinea ou ligeiramente recurvado.


Schem. 12

(Continúa)

SUR UN APPAREIL POUR ORIENTER LE FOYER PRODUCTEUR DES RAYONS «X» ET MESURER SA DISTANCE AU FLUOROSCOPE OU À UNE PLAQUE PHOTOGRAPHIQUE

PAR

VIRGILIO MACHADO

Les projections radioscopiques et radiographiques sont des projections coniques.

Les dimensions des projections obtenues dépendent des positions relatives du foyer actinogénique, de l'objet à examiner et de l'écran fluoroscopique ou de la plaque photographique.

Dans un article publié dans la revue dirigée par le professeur Cornil *Connaissances médicales*, [1] j'ai indiqué les régles pour déterminer la grandeur réelle des objets, d'après les dimensions des images radiographiques ou radioscopiques. [2]

Je ne m'occuperai pas des dimensions de la pénombre de ces images, parce que ce sujet est déjà bien étudié, et on a établi le théorème fondamental, que la pénombre diminue avec l'écartement du foyer actinogénique de l'objet, ainsi qu'avec le rapprochement de cet objet du plan, qui doit recevoir sa projection.

Il est facile de voir que la déformation (celle de l'image par rapport à l'objet), inhérente à la projection conique, est d'autant moindre que l'axe du cône de rayons X se rapproche d'une perpendiculaire au plan, dont on veut obtenir une projection, plan qui doit être disposé parallèlement à l'écran fluoroscopique ou à la plaque photographique.

Placer le foyer actinogénique dans des conditions où se réalise le mieux ce desideratum, c'est ce que j'appelle «orienter le tube».

---

[1] Cet article a été aussi inséré dans la *Revista de medicina e cirurgia praticas* et dans les *Nouvelles scientifiques*.

[2] Le mot image n'est pas pris ici, dans son acception rigoureuse, mais il est généralement adopté.

Voyons comment on peut arriver facilement à ce but et en même temps mesurer la distance du foyer au plan qui reçoit la projection.

Si l'on coupe un cône droit (fig. 1) au milieu de sa hauteur par un plan perpendiculaire à l'axe, le rayon r de la section obtenue égale le demi rayon R de la base, vu que

$$\frac{VO}{Vo}=\frac{R}{r} \quad \text{et} \quad VO=2Vo$$

D'où l'on conclut que si l'on place en V un point lumineux et au niveau de la section acb un cercle de rayon $r=\frac{1}{2}R$, son ombre se projectera suivant un cercle ACB de rayon R sur le plan MN.

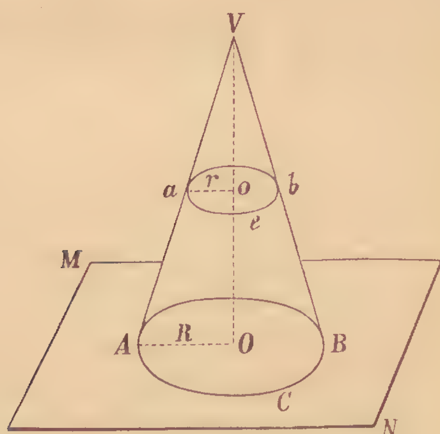


Fig. 1

Quand on fait varier la position du foyer lumineux et l'on désire obtenir le même résultat on doit faire varier aussi la position du cercle acb.

On reconnait immédiatement que l'on a obtenu la superposition demandée, quand le cercle est à égale distance du point V et du plan MN.

Ainsi, si l'on détermine la distance des deux cercles, en position telle que l'ombre du plus petit se projecte sur le plus grand, on connaîtra la distance du foyer lumineux au plan MN.

J'ai appliqué cette série de considérations à la construction d'un appareil, qui fait le sujet de cette note et se trouve représenté dans la figure ci-jointe:

Cet appareil (fig. 2) est simple et ainsi constitué.

Sur une plaque rectangulaire en bois s'élève perpendiculairement une tige métallique graduée en millimètres.

Un disque en bois *d*, maintenu par une pièce métallique peut se déplacer le long de la tige.

Sur la plaque et sur le disque sont encastrés deux anneaux en plomb centrés avec la tige. La circonférence extérieure de l'anneau de la plaque est à rayon double de celle de l'anneau du disque.

La plaque en bois peut s'adapter parfaitement, au moyen de crochets sur le fond noir du fluoroscope (face opposée à celle enduite de platinocyanure de baryum).

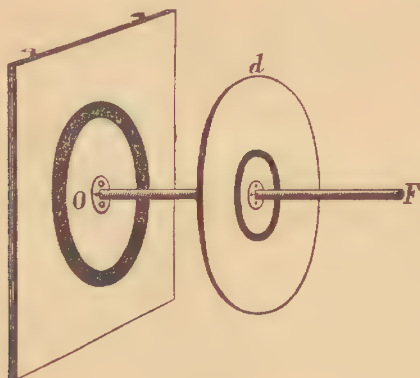


Fig. 2

Si nous voulons orienter le foyer producteur de rayons **X**, par rapport à l'écran fluoroscopique, de sorte que l'axe du cône de rayons **X** soit perpendiculaire à cet écran, nous appliquerons la plaque en bois de l'appareil sur le fond du fluoroscope et nous placerons l'ampoule Rœntgen en position telle que son centre reste sensiblement dans le prolongement de la tige *OF*.

L'ampoule se trouvera convenablement orientée quand, dans une position quelconque du disque *d*, l'ombre de son anneau de plomb se trouvera centrée avec celle de l'anneau de la plaque.

En déplaçant successivement le disque *d* le long de la tige *OF*, on arrivera à trouver une position telle que les contours extérieurs des ombres des deux anneaux se superposeront (en s'ajustant exactement) dans le champ fluoroscopique.

Quand on arrive à ce résultat, la distance de l'écran au foyer producteur des rayons **X** est immédiatement connue, puisqu'elle est le double de la distance du disque à la plaque.

L'opérateur peut varier, selon les convenances de son observation, l'éloignement du foyer, puisque la mesure de cette distance est toujours facile.

Ayant déterminé avec notre appareil les positions convenables du

foyer actinogénique et du fluoroscope, on peut substituer ce dernier par le chassis photographique, quand, au lieu de radioscopie, on veut faire de la radiographie.

Lorsque les rapports entre le tube et l'écran sont convenablement établis et mesurés on enlève l'appareil d'orientation, qui était fixé sur le fond du fluoroscope au moyen de crochets.

Lisbonne, le 26 Décembre 1898.

O VOLUME DE URINA EM 24 HORAS

POR

VIRGILIO MACHADO

A medição do volume de urina excretada durante um nychthémero completo é uma das mais importantes determinações docimásicas em urologia clinica.[1]

De pouco vale o conhecimento das variações nos pesos das substancias normaes ou anormaes, existentes na solução urinaria, quando não sejam referidas a toda a urina recolhida n'um periodo completo de 24 horas.

As variações, que forem referidas, em analyses successivas, a 100 ou a 1000 centimetros cubicos de urina não poderão servir para termos de comparação, d'onde se tirem conclusões, com valor urosemeiologico.

Um doente, por exemplo, que n'um determinado dia excrete 30 grammas de assucar por litro e cuja urina contenha por occasião de outra analyse, sómente 15 grammas, no mesmo volume, poder-se-ha enganar redondamente se julgar que no segundo caso a sua glycosuria está reduzida a metade.

Na primeira e na segunda hypothese o peso do assucar excretado com a urina pode ser o mesmo em periodos de 24 horas, que são os que importa confrontar em urosemeiologia.

Basta para isso que, por occasião da primeira analyse, o volume de urina, em um nychthémero, tenha sido metade do volume excretado, no dia em que se fez a segunda determinação da glycose.

Um outro exemplo, em que fizessemos considerações de ordem inversa poderiamos tambem apresentar em apoio da proposição, que assignalámos.

---

[1] Regras para medir o volume de urina em 24 horas:

1.ª Urinar pela manhã (marcar a hora) e *não guardar* a urina emittida n'esta micção.

2.ª Em um vaso bem limpo, e que se deve tapar, nos intervallos das micções, recolher toda a urina vertida durante as 24 horas, *incluindo a da ultima micção á mesma hora* em que na vespera se começou a contagem.

Uma vantagem fundamental ha tambem no preceito de ser sempre, em urinas correspondentes a periodos de 24 horas, que incidam as investigações uroanalyticas.

Só assim as variações observadas dirão respeito a um periodo, que se reproduz approximadamonte com phases semelhantes de alimentação, actividade ou repouso corporaes, somno, etc.

No quadro junto são pela primeira vez distribuidas, por grupos, as principaes variações, que podem ser observadas no volume de urina em 24 horas e as circumstancias especiaes, em que ellas teem logar.

Mencionadas estão ahi tambem, para que sirvam de termos de confronto, as médias volumetricas, que são hoje mais geralmente admittidas.

Depois de tomadas em consideração as circumstancias, que, independentemente de influencias pathologicas, podem modificar o volume urinario, em 24 horas, grande fica sendo a importancia da sua determinação, quando se trate de apreciar a actividade das mutações chimicas (da nutrição e dynamogenia animaes) ou se procure fundamentar o diagnostico d'estes estados morbidos: diabetes insipida, diabetes saccharina, glycosuria ou hyperglycémia e respectivas variedades, diabetes azoturica, phosphaturica e oxalurica, nephrites parenchymatosa e intersticial, hypoglobulia, etc.

No conhecimento do volume urinario, em um nychthémero pode basear-se, em um ou outro caso, o prognostico de algumas doenças.

Ainda no quadro junto, sómente para que fique completo e não porque seja indispensavel para o assumpto de que directamente estamos tratando, vão indicados os subsidios semeiologicos fornecidos tanto pelo numero de micções em 24 horas, como tambem pelo volume de liquido vertido em cada micção.

VOLUME URINARIO NORMAL E CIRCUMSTANCIAS QUE INFLUEM NAS SUAS VARIAÇÕES

VOLUME URINARIO TOTAL EM 24 HORAS

- **NORMAL** (ou dentro dos limites physiologicos). Valores médios
  - 1500^{cc} (Homem). (*)
  - 1400^{cc} (Mulher).
- **ANORMAL** (acima ou abaixo dos limites physiologicos)
  - **MAIOR OU POLYURIA**
    - **HYDRICA** ou por excesso de agua em relação aos solidos dissolvidos
      - **Simples**
        - *Ab ingesta*, sobretudo liquidos e alimentação animal.
        - *Por augmento pathologico da tensão sanguinea*
          - Hypertrophia do ventriculo esquerdo.
          - Arterio-esclerose.
          - Cirrhose hypertrophica do figado.
        - *Pela acção do ar comprimido.*
        - *Por diminuição de transpiração* (em virtude de ser elevado o grau hygrometrico ou baixa a temperatura do ambiente).
        - *Durante a reabsorpção de exsudados.*
        - *Após as pyrexias* (crise),
        - *Pela acção de diureticos*
          - Digitalis — Convallaria — Cafeina — Theobromina — Scilla — Azotato de potassio — Acetato de potassio — Iodato de potassio — Calomelanos — Bebidas carbonicas — Assucar — Bagas de zimbro — Alcool — Ether nitroso alcoolisado — Diuretina, etc.
        - *Por excitação directa ou reflexa dos centros nervosos*
          - Emoções moraes.
          - Lesões do pavimento do 4.º ventriculo.
          - Epilepsia (depois dos attaques).
          - Chorêa.
          - Hysteria (em certos casos).
          - Neurasthenia.
          - Meningite espinhal.
          - Tabes.
          - Hemicranea.
          - Attaques de asthma (consecutivamente ás crises).
          - Attaques de angina de peito (consecutivamente ás crises).
          - Effeito reflexo da ulcera gastrica.
          - Effeito reflexo e toxico da dilatação gastrica.
          - Excitação faradica da região hepatica.
          - Após fricções cutaneas energicas.
          - Em seguida a banhos muito frios ou muito quentes.
        - *Nas doenças prostaticas, tuberculose das vias urinarias, excitação do collo vesical, por qualquer causa, espasmo do musculo detrusor vesical*, etc.
      - **Albuminurica**
        - *Na nephrite parenchymatosa* tratada pelo regimen lacteo (quando este é acompanhado por polyuria).
        - *Na pyelite.*
    - **VERDADEIRA** ou por excesso de agua e de solidos dissolvidos
      - **Simples.** — Geralmente *azoturica* (raras vezes *phosphaturica* ou *oxalurica*).
      - **Glycosurica.** — Nas variedades de *diabetes saccharina arthritica* e na *diabetes verdadeira*.
      - **Albuminurica.** — Na *nephrite intersticial, ou esclerose renal*, atrophia granulosa do rim, com a correspondente hypertrophia do ventriculo esquerdo do coração.
  - **MENOR OU OLIGURIA**
    - **VERDADEIRA** ou por diminuição de agua e de elementos solidos dissolvidos; algumas vezes falsa ou apparente, porque só o volume de agua está diminuido, sendo normal o peso dos elementos solidos dissolvidos
      - *Por embaraço da excreção renal* — Lithiase — Hydronephrose — Pus no ureter (pyelite).
      - *Nephrite parenchymatosa.*
      - *Degenerescencia amyloide do rim.*
      - *Lesões cardiacas com hyposystolia.*
      - *Abstenção de liquidos.*
      - *Abstenção de alimentos azotados.*
      - *Secreções abundantes, exsudações e transsudações*
        - Lactação.
        - Suores profusos.
        - Diarrhea abundante.
        - Vomitos muito repetidos
        - Ascite.
        - Pleuresia.
        - Edemas.
      - *No periodo agudo das doenças febris.*
      - *Na anemia hypoglobulica.*
      - *Na cirrhose atrophica hepatica.*
      - *Thrombose da veia cava inferior ou da veia renal.*
      - *Na inanição e dyscrasias.*
      - *Na maioria das atrophias amarellas do figado.*
      - *Hysteria* (em certos casos).
      - *Regimen vegetal predominante.*
      - *Acção de certos medicamentos*
        - Ferro.
        - Preparados de acido sulfurico.
        - Preparados de cobre.
        - Chlorato de potassio.
        - Cantharidas.
        - Arsenico.
        - Citrato de ferro e quinina.
        - Preparados plumbicos.
        - Valeriana.
        - Opio.
        - Belladona.
      - *Intoxicação saturnina.*
      - *Faradisação da região renal.*
      - *Galvanisação anodal do bolbo rachidiano.*
    - *NB.* — Não confundir a falta de evacuação da urina por paralysia da bexiga, obstrucção da urethra ou qualquer outra causa *(Ischuria paradoxal)* com a falta de excreção d'este liquido.
  - **NULLO OU ANURIA**
    - *Na cholera-morbus.*
    - *Occlusão dos ureteres*
      - Compressão
        - Por tumor.
        - Utero gravido.
      - Obstrucção pelo pus tornado muito viscoso pela urina alcalina.
    - *Occlusão da urethra.*

VOLUMES PARCIAES (OU POR MICÇÃO) NAS 24 HORAS

- **MENORES** em numero de centimetros cubicos, sendo porém maior o numero de micções em 24 horas — **POLLAKIURIA.**
  - *Paralysia do corpo da bexiga* — Regorgitação.
  - *Periodo inicial do mal de Bright.*
  - *Diminuição da capacidade vesical*
    - Causa endogena
      - Calculos.
      - Tumores.
    - Causa exogena
      - Compressão
        - Pelo utero gravido.
        - Por tumor abdominal.
        - Pelo recto — Tumor.
  - *Irritação da bexiga*
    - Calculos.
    - Cystite.
  - *Hypertrophia ou inflammação da prostata.*
- **NORMAES** em numero de centimetros cubicos (250 a 300^{cc}), sendo porém maior o numero das micções — **POLYURIA.**

(*) Admitte-se geralmente no adulto uma excreção urinaria média de 60 a 70^{cc} por hora ou approximadamente 1 centimetro cubico por hora e por cada kilo de peso do corpo. Esta proporção varía com a edade e o sexo. (Consultar os tratados especiaes de urologia).

INDICE

DOS

ARTIGOS CONTIDOS NO QUINTO VOLUME

Num. XVII — JULHO, 1897

Num. XVIII — DEZEMBRO, 1897

Num. XIX — JUNHO, 1898

Num. XX — DEZEMBRO, 1898

PREÇO D'ESTE NUM. 1500 RÉIS

Acha-se á venda no Deposito de impressos da Academia.

A correspondencia deve ser dirigida, *franca de porte,* á Redacção do JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS, PHYSICAS e NATURAES, na Academia Real das Sciencias de Lisboa, rua do Arco (a Jesus).

